

N° d'Ordre : 9 (1976)

Référence C.N.R.S. : A.O. 12 537

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Christian WIELGOSZ

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VIBRATIONS DES SPHERES

ET CALOTTES SPHERIQUES DE FAIBLE EPAISSEUR

Soutenue le 26 mai 1976 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

Président

M. CHALEAT

M. DO

M. DUBIGEON

M. BERNARD

} Examineurs

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

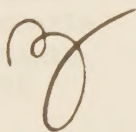
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Christian WIELGOSZ

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VIBRATIONS DES SPHERES

ET CALOTTES SPHERIQUES DE FAIBLE EPAISSEUR

Soutenue le 26 mai 1976 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

Président

M. CHALEAT

M. DO

M. DUBIGEON

M. BERNARD

} Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555012_0021

UNIVERSITE DE NANTES

Président : M. SPARFEL - Pharmacie -

Liste des enseignants des disciplines scientifiques :

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. MEZENCEV (ENSM)	Automatique
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MOUTON	"
	Melle OFFRET (ENSM)	"
	M. GRAFF	Chimie
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	M. GARRIGUES	Biologie
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. FORESTIER	"
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. LEBORGNE	"
	M. GUEVEL (ENSM)	Hydrodynamique
	M. BARDON Roger	Physique
	M. CAILLER (IUT Nantes)	"
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NAOUR	"
	M. ROSIER	"
	M. CHABANEL	Chimie
	M. POINTEAU (ENSM)	"
	M. TOURNOUX	"
	M. LE LEC (IUT St-Nazaire)	Génie Chimique
	M. BOUCHY (IUT Nantes)	Métallurgie
	M. GOBIN (ENSM)	"

Professeurs sans chaire (suite)	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. DHOMBRES	Mathématiques
	M. DO (ENSEM)	"
	M. GAPAILLARD	"
	M. GATESOUBE	"
	M. LAMEAU (ENSM)	"
	M. PHAN-THE-LAI	"
	M. VOGEL	"
	M. DUBIGEON (ENSM)	Mécanique
	M. VAUSSY (ENSM)	"
	M. GROVEL (IUT St-Nazaire)	Génie Civil
	M. VILAINE (ENSM)	"
	M. SULMONT (ENSM)	Hydrodynamique
	M. de LARMINAT (IUT Nantes)	Automatique
	M. LE CORRE (ENSM)	"
	M. THOMAS (IUT Nantes)	"
	M. ERCEAU (IUT Nantes)	L.I.A.N.A.
	M. BECLE (IUT St-Nazaire)	Physique
	M. DEVELY (IUT St-Nazaire)	"
	M. LE BIHAN	"
	M. LEROY (IUT Nantes)	"
M. LE MAITRE R.	"	
M. LONCKE	"	
M. LE MAITRE Félix (ENSM)	Technologie et Tech- niques de Production	
Mme MARTIN	Chimie	
M. AMOURIQ	Biologie	
M. LE BRUN	"	
Mme NICOLAS-PRATT	"	
M. NICOLAS	Sciences de la Terre	

Secrétaire Général : M. LERAY

Je vous prie de m'excuser de ne vous avoir pas écrit plus tôt, mais j'ai été très occupé par mes études et par les affaires de la maison. J'espère que vous allez bien et que tout se passe bien de votre côté.

Je vous prie de m'excuser de ne vous avoir pas écrit plus tôt, mais j'ai été très occupé par mes études et par les affaires de la maison. J'espère que vous allez bien et que tout se passe bien de votre côté.

Je vous prie de m'excuser de ne vous avoir pas écrit plus tôt, mais j'ai été très occupé par mes études et par les affaires de la maison. J'espère que vous allez bien et que tout se passe bien de votre côté.

Je vous prie de m'excuser de ne vous avoir pas écrit plus tôt, mais j'ai été très occupé par mes études et par les affaires de la maison. J'espère que vous allez bien et que tout se passe bien de votre côté.

A mes parents,

A ma femme.

Qu'il nous soit permis de remercier ici Monsieur le Professeur PIRONNEAU de nous avoir prodigué des conseils tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental, et de nous faire l'honneur de présider ce jury de thèse.

Nous ajouterons à ces remerciements ceux que nous adressons à Monsieur le Professeur CHALEAT qui a proposé le sujet et qui a bien voulu nous faire l'honneur de porter un intérêt constant à nos travaux.

Nous tenons également à remercier Messieurs les Professeurs DO, DUBIGEON et BERNARD. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute notre gratitude.

Nous ne pouvons oublier d'exprimer toute notre reconnaissance à tout ceux qui nous ont aidé dans notre travail, en particulier à Monsieur MARTI qui a guidé nos premiers pas dans cette recherche, à Monsieur DUBIGEON dont le constant soutien nous a été précieux, ainsi qu'à tout le personnel du Laboratoire de Mécanique des Structures et de l'Imprimerie de l' E. N. S. M.

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

r, θ, ψ	système de coordonnées sphériques
$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$	vecteurs unitaires
$\overline{\overline{T}}$	tenseur
u, v, w	déplacements d'un point de la surface moyenne
h	épaisseur de la coque
R	rayon moyen de la coque
ρ	masse volumique
E	module d'Young
ν	coefficient de Poisson
P_n, P_n^m	polynômes de Legendre
j_n, y_n	fonctions sphériques de Bessel
$N_\theta, N_\psi, N_{\theta\psi}$	efforts
$M_\theta, M_\psi, M_{\theta\psi}$	moments
Q_θ, Q_ψ	efforts tranchants
$\varepsilon_\theta, \varepsilon_\psi, \varepsilon_{\theta\psi}$	déformations
$K_\theta, K_\psi, K_{\theta\psi}$	déformations flexionnelles de la surface moyenne
F	fonction de force
$\overline{Y}_i$	vecteur de variables nodales
E_c	énergie cinétique
E_p	énergie potentielle de déformation
$\mathcal{M}, M, \mu$	matrices masse
$\mathcal{K}, K, \gamma$	matrices raideur
T	matrices de passage
m	nombre d'ondes circonférentielles
Λ	pulsations propres adimensionnelles
Ω	

SOMMAIRE

	<u>Page</u>
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I - Mise en équations	2
I.1.- Généralités	2
I.1.1. - Préliminaires	2
I.1.2. - Relations contraintes-déformations et déformations-déplacements	3
I.2.- Hypothèses de calcul	4
I.3.- Equations du mouvement	5
I.3.1. - Sommation des contraintes par unité de longueur des sections normales	5
I.3.2. - Mise en équations	8
I.3.2.1. - Définition des vecteurs aux points d'application des efforts	8
I.3.2.2. - Bilan des efforts	9
I.3.2.3. - Equations du mouvement	13
I.3.3. - Relations contraintes intégrées-déformations	13
I.4.- Position du problème	17
CHAPITRE II - Résolution par des méthodes analytiques	18
II.1.- Cas de la sphère libre dans l'espace	18
II.1.1. - Membrane	18
II.1.2. - Coque sphérique de faible épaisseur	22
II.1.2.1. - Expression de l'effort tranchant Q_θ	23
II.1.2.2. - Introduction de la fonction de force $F(\theta, t)$	24
II.1.2.3. - Equations du mouvement	24
II.1.2.4. - Résolution	25
II.1.3. - Epaisseur quelconque	27
II.2.- Cas des calottes sphériques	29
II.2.1. - Membrane	29
II.2.2. - Coque sphérique de faible épaisseur	30

CHAPITRE III - Résolution par la méthode des éléments finis	31
III.1. - Introduction	31
III.1.1.- Généralités	31
III.1.2.- Description de l'élément utilisé	31
III.1.3.- Choix des déformées dynamiques	34
III.2. - Calcul des énergies de l'élément i	34
III.2.1.- Energie cinétique	34
III.2.2.- Energie potentielle de déformation	35
III.2.3.- Définition des intégrales	36
III.3. - Expression des matrices de l'élément général	38
III.3.1.- Matrices masse et raideur élémentaires	38
III.3.2.- Matrice de passage	43
III.4. - Cas particulier du pôle	44
III.4.1.- Le point singulier	44
III.4.2.- Matrices masse et raideur élémentaires	46
III.4.3.- Matrice de passage	46
III.5. - Cas particulier où $m = 0$	47
III.5.1.- Découplage du système	48
III.5.2.- Elément simplifié	49
III.5.2.1.- Energies de l'élément i	49
III.5.2.2.- Matrices masse et raideur élémentaires	50
III.5.2.3.- Cas du pôle	51
III.5.2.4.- Matrices de passage	51
III.5.3.- Remarque sur le choix des déformées dynamiques	52
III.6. - Calcul des valeurs et des vecteurs propres	53
III.6.1.- Emboitage des matrices élémentaires	53
III.6.2.- Utilisation de variables adimensionnelles	53
III.6.3.- Méthode de calcul	53
III.6.3.1.- Sous-programmes	53
III.6.3.2.- Programme principal	56

CHAPITRE IV - Etude de quelques cas	58
IV.1. - Vibrations axisymétriques	58
IV.1.1. - Cas de la sphère libre dans l'espace	58
IV.1.1.1.- Membrane	58
IV.1.1.2.- Coque sphérique de faible épaisseur	63
IV.2.2. - Cas des calottes sphériques	63
IV.2. - Vibrations non symétriques	64
CHAPITRE V - Vérification expérimentale	67
V.1. - Description du dispositif expérimental	67
V.2. - Résultats expérimentaux	70
V.2.1. - Appropriation	70
V.2.2. - Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux	71
CONCLUSION	75
ANNEXES	
Annexe n° 1 Justification de la méthode de calcul des intégrales	76
Annexe n° 2 Schéma des matrices simplifiées du pôle	82
Annexe n° 3 Matrices de l'élément simplifié	86
Annexe n° 4 Listings	92
BIBLIOGRAPHIE	99

INTRODUCTION

Si le problème des sphères libres dans l'espace est bien connu et trouve ses origines dans les travaux de LAMB ($[1]$, $[2]$), il n'en est pas de même de celui des calottes sphériques sur lequel les travaux publiés sont beaucoup moins nombreux. Encore ces travaux se bornent-ils au cas d'une épaisseur de coque constante. Nous nous proposons donc ici de déterminer les pulsations propres de sphères ou de calottes sphériques de faible épaisseur constante ou lentement variable.

Après une mise en équations et une analyse bibliographique, nous construisons un élément spécifique à la sphère, en coordonnées globales. Nous étudions le cas particulier du point singulier qu'est le pôle, mettons en évidence l'apparition de pulsations propres parasites. Nous terminons par une vérification expérimentale en mesurant les fréquences propres les plus basses d'une demi-sphère d'épaisseur lentement variable.

CHAPITRE I

Mise en Equations

I.1 - GENERALITES

I.1.1. - Préliminaires

Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir les équations régissant le mouvement de la surface moyenne d'une coque sphérique en vibrations libres.

Nous utiliserons le système de coordonnées sphériques suivant :

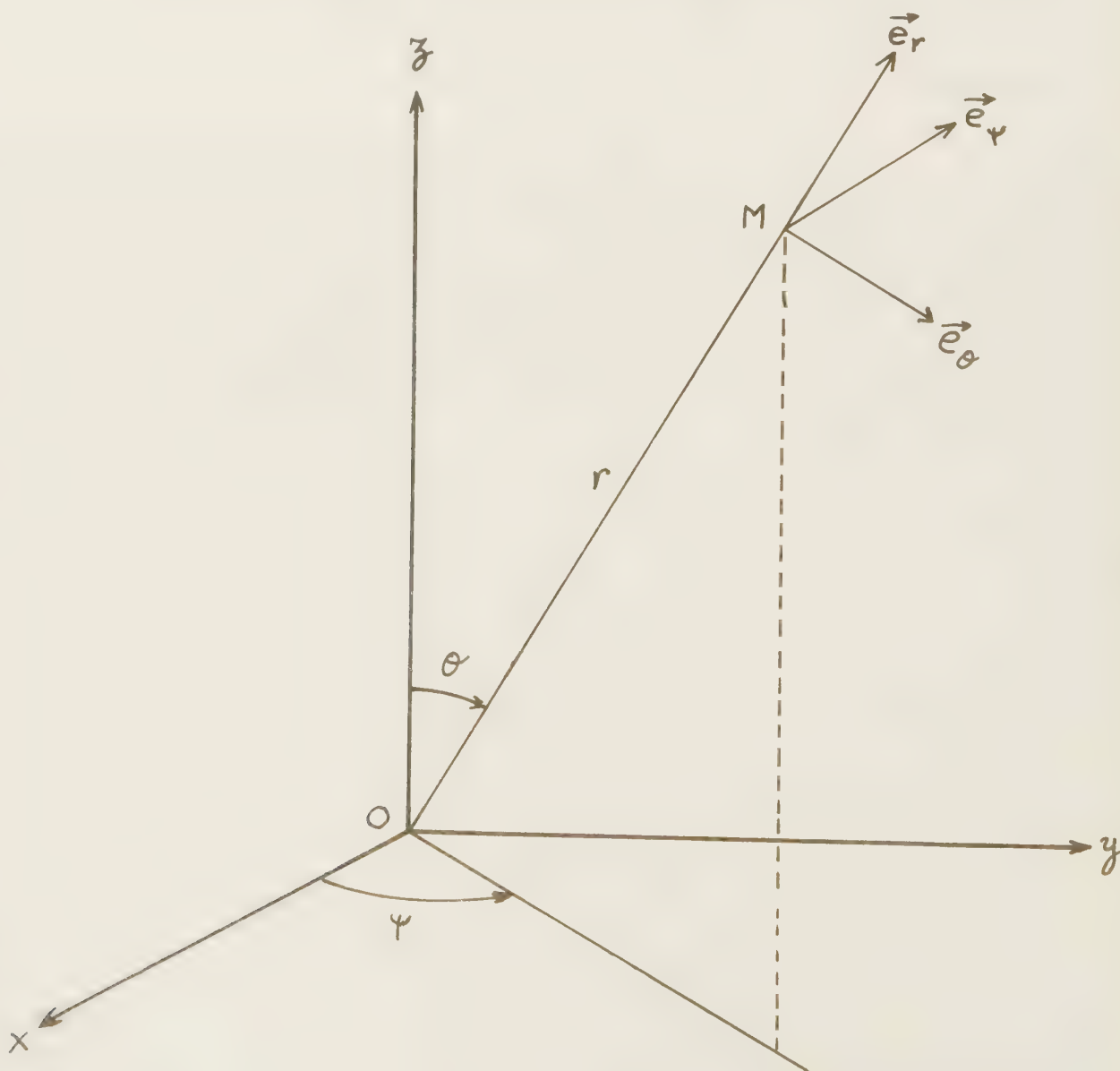


FIGURE : 1

Nous noterons respectivement u, v, w les déplacements radial et tangentiels d'un point de la surface moyenne (ils seront repérés positivement suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$), et u_p, v_p, w_p les déplacements d'un point quelconque de la coque.

1.1.2. - Relations contraintes-déformations et déplacements

Nous rappelons les résultats classiques qu'on peut trouver dans les livres de MANDEL [3] ou GERMAIN [4] : si nous notons E le tenseur des déformations :

$$E = \begin{vmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{r\psi} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\psi} \\ \epsilon_{\psi r} & \epsilon_{\psi\theta} & \epsilon_{\psi\psi} \end{vmatrix}$$

les relations déformations déplacements sont données par :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_p}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_p + \frac{\partial v_p}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_{\psi\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(u_p \sin \theta + v_p \cos \theta + \frac{\partial w_p}{\partial \psi} \right)$$

$$2 \epsilon_{r\theta} = 2 \epsilon_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_p}{\partial \theta} - \frac{v_p}{r} + \frac{\partial v_p}{\partial r}$$

$$2 \epsilon_{r\psi} = 2 \epsilon_{\psi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_p}{\partial \psi} - \frac{w_p}{r} + \frac{\partial w_p}{\partial r}$$

$$2 \epsilon_{\theta\psi} = 2 \epsilon_{\psi\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_p}{\partial \psi} - w_p \cotg \theta + \frac{\partial w_p}{\partial \theta} \right)$$

les relations contraintes-déformations sont données par :

$$\bar{\Sigma} = \lambda \textcircled{H} \bar{I} + 2 \mu \bar{E}$$

avec $\bar{\Sigma}$ tenseur des contraintes

$\bar{I}$ tenseur unité

λ, μ coefficients de Lamé

$\textcircled{H}$ dilatation cubique

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

et

$$\textcircled{H} = \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cotg \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \psi}$$

I.2 - HYPOTHESES DE CALCUL

Hormis le cas de la méthode générale exposée brièvement au paragraphe 2.1.3., nous adopterons les hypothèses de calcul des coques (SOARE [5]).

1 - Le matériau est continu, homogène et isotrope.

2 - Les sollicitations du matériau restent inférieures à la limite de proportionnalité dans le domaine élastique, et le module d'élasticité est le même à la traction et à la compression.

3 - Les déformations élastiques sont faibles par rapport à l'épaisseur de la coque sphérique.

4 - Les points situés sur une normale à la surface moyenne de la coque sphérique avant déformation restent sur une droite toujours normale à cette surface après déformation. La longueur d'un arc sur la surface moyenne ne varie pas. Cette hypothèse exprime que les contraintes de cisaillement $\sigma_{\psi r}$ et $\sigma_{\psi \theta}$ sont nulles et que l'allongement spécifique ϵ_{rr} est également nul, c'est-à-dire que les déplacements de tous les points d'une normale à la surface moyenne sont constants et égaux au déplacement du point correspondant sur la surface moyenne.

5 - Les contraintes normales à la surface moyenne sont négligeables ($\sigma_{rr} = 0$).

Ceci entraîne la remarque suivante : l'hypothèse 4 caractérise un état de déformation plane ; l'hypothèse 5 caractérise un état de contraintes planes. On aboutit donc à un état plan-mixte de contraintes et de déformations qui ne satisfait plus à la dualité de toutes les contraintes tangentielles. Ainsi $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{r\psi}$ ne sont pas nulles alors que nous avons remarqué que $\sigma_{\theta r}$ et $\sigma_{\psi r}$ l'étaient. Enfin, la dualité $\sigma_{\theta\psi} = \sigma_{\psi\theta}$ subsiste.

Toutes ces approximations sont parfaitement admissibles compte tenu de la faible épaisseur de la coque sphérique.

I.3 - EQUATIONS DU MOUVEMENT

1.3.1.- Sommation des contraintes par unité de longueur des sections normales (contraintes intégrées).

Nous découperons dans la coque sphérique des éléments définis par les sections normales orthogonales entre elles :

$$\theta, \psi = \text{constante et } \theta + d\theta, \psi + d\psi = \text{constante.}$$

Dans la section $\psi = \text{constante}$ (figure 2) apparaissent : la contrainte normale σ_ψ et les contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\psi}$ et $\sigma_{r\psi}$.

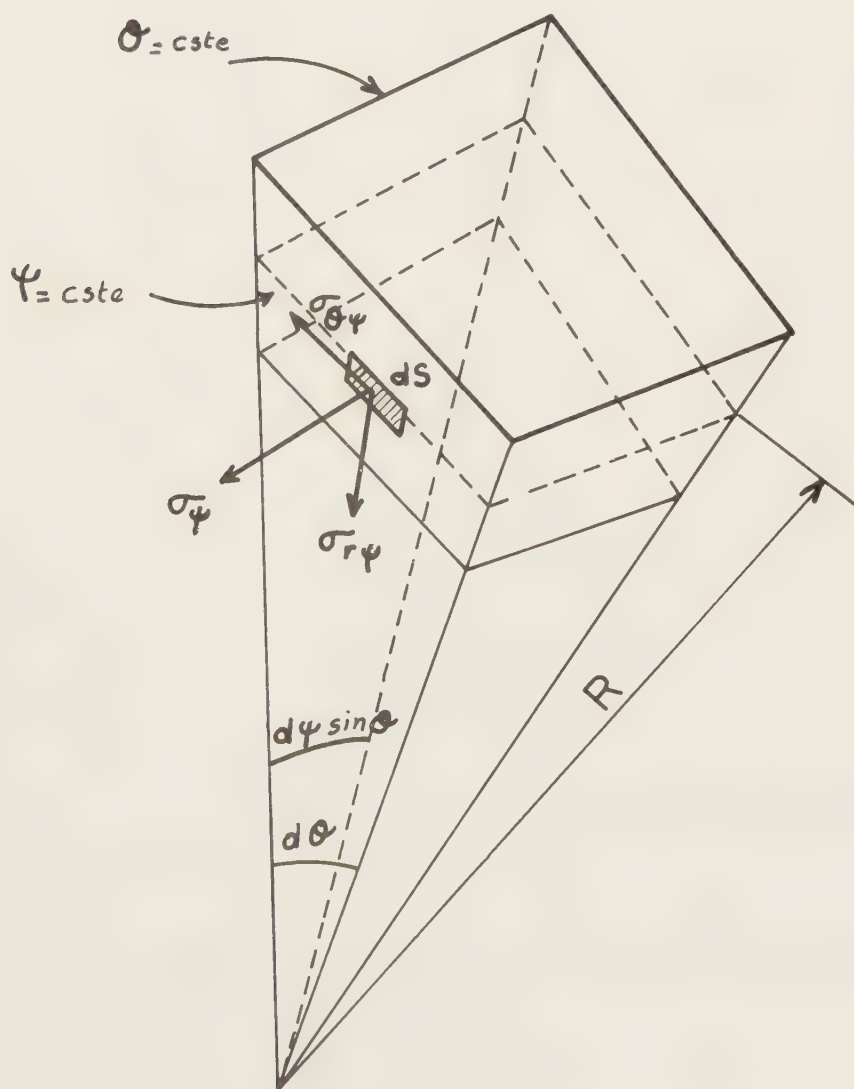


FIGURE : 2

Sommons par exemple la contrainte σ_ψ dans cette section (figure 3),

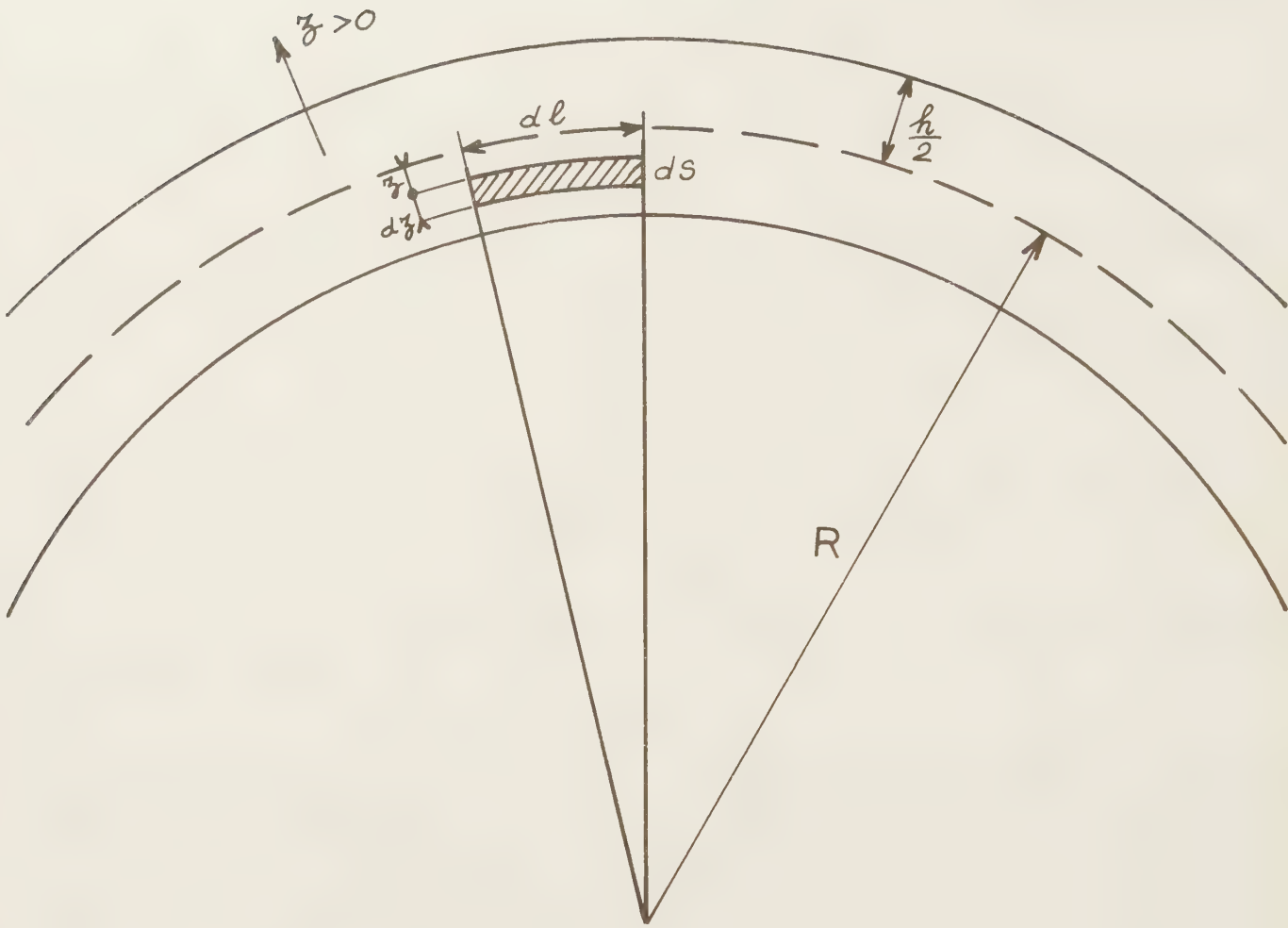


FIGURE : 3

L'élément de surface à la cote z vaut :

$$dS = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot d\ell \cdot dz$$

En sommant les contraintes σ_ψ dS nous obtenons :

$$N_\psi \cdot d\ell = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\psi \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot d\ell \cdot dz$$

D'où l'expression de l'effort normal en ψ :

$$N_{\psi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\psi} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

Nous définirons de même les autres efforts et moments :

$$\begin{vmatrix} N_{\psi} \\ N_{\theta} \\ N_{\theta\psi} \end{vmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{vmatrix} \sigma_{\psi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{\theta\psi} \end{vmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$\begin{vmatrix} M_{\psi} \\ M_{\theta} \\ M_{\theta\psi} \end{vmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{vmatrix} \sigma_{\psi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{\theta\psi} \end{vmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$\begin{vmatrix} Q_{\psi} \\ Q_{\theta} \end{vmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{vmatrix} \sigma_{r\psi} \\ \sigma_{r\theta} \end{vmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

avec	N_{θ} , N_{ψ}	efforts normaux
	$N_{\theta\psi} = N_{\psi\theta}$	efforts de cisaillement
	M_{θ} , M_{ψ}	moments de flexion
	$M_{\theta\psi} = M_{\psi\theta}$	moments de torsion
	Q_{θ} , Q_{ψ}	efforts tranchants

1.3.2. Mise en équations

1.3.2.1. - Définition des vecteurs aux points d'application des efforts

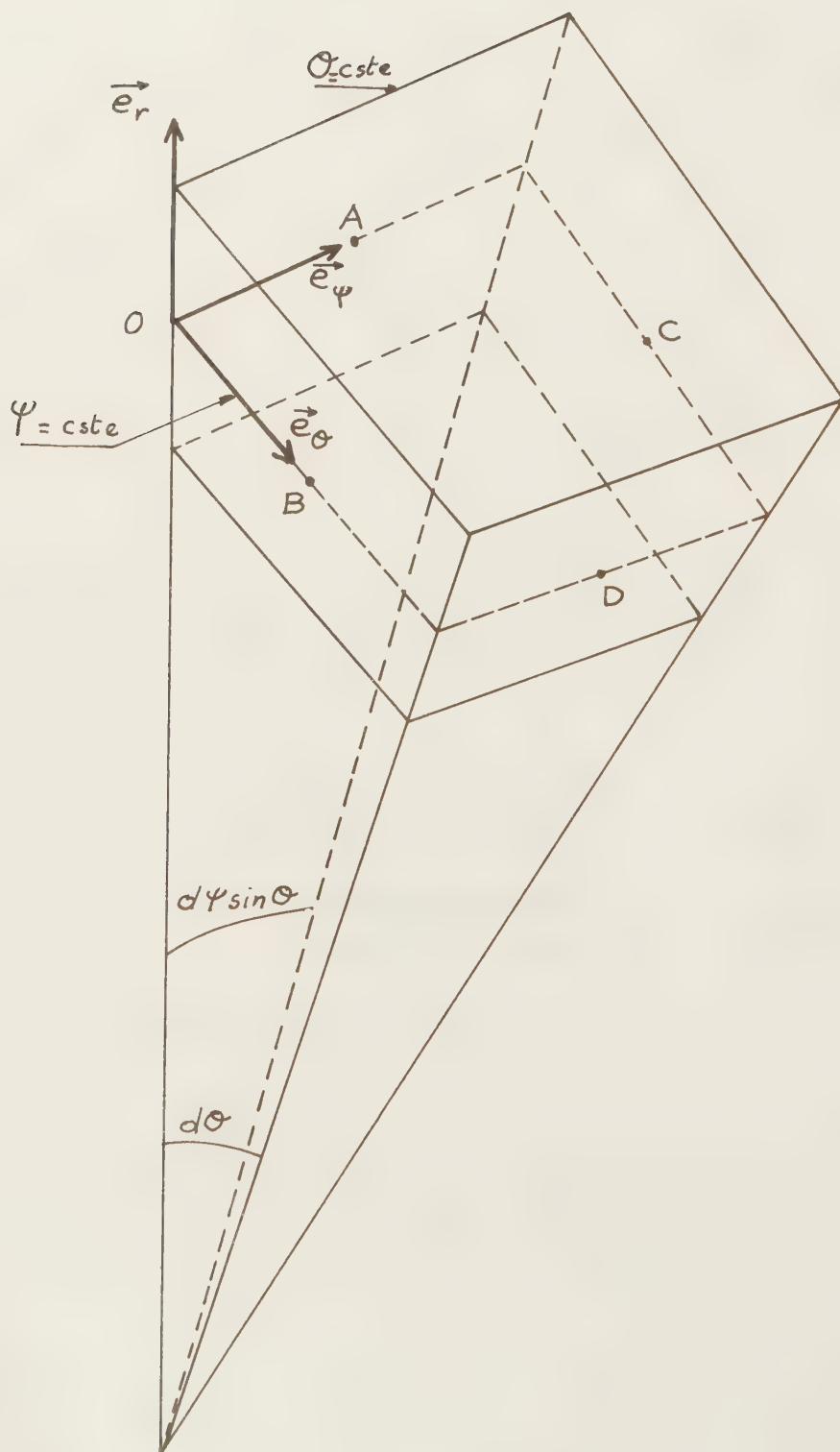


FIGURE : 4

On suppose que le repère est défini par $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$ unitaires au point O. Pour nous permettre d'écrire les théorèmes généraux, il nous faut connaître les repères aux points A, B, C et D centres géométriques des sections.

En remarquant que :

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta d\psi \vec{e}_\psi \\ d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r + \cos \theta d\psi \vec{e}_\psi \\ d\vec{e}_\psi = -d\psi \sin \theta \vec{e}_r - d\psi \cos \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

On obtient aux différents points A, B, C, D :

$$\text{en A} \quad \begin{cases} \vec{e}_r + \sin \theta \frac{d\psi}{2} \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\theta + \cos \theta \frac{d\psi}{2} \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\psi - (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \frac{d\psi}{2} \end{cases}$$

$$\text{en B} \quad \begin{cases} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{2} \\ \vec{e}_\theta - \vec{e}_r \frac{d\theta}{2} \\ \vec{e}_\psi \end{cases}$$

$$\text{en C} \quad \begin{cases} \vec{e}_r + \sin \theta d\psi \vec{e}_\psi + \frac{d\theta}{2} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta + \cos \theta d\psi \vec{e}_\psi - \frac{d\theta}{2} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\psi - (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) d\psi \end{cases}$$

$$\text{en D} \quad \begin{cases} \vec{e}_r + d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \frac{d\psi}{2} \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\theta - d\theta \vec{e}_r + \cos \theta \frac{d\psi}{2} \vec{e}_\psi \\ \vec{e}_\psi - (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \frac{d\psi}{2} \end{cases}$$

1.3.2.2. - Bilan des efforts

Nous adopterons les conventions des signes suivantes :

les paramètres ci-dessous seront positifs quand :

- N_θ, N_ψ représentent des efforts de traction.

- $N_{\theta\psi}$ et $N_{\psi\theta}$ tendent à diminuer l'angle $\widehat{AOB}$.
- Q_{θ} , Q_{ψ} sont dirigés vers l'intrados de la coque sphérique dans les sections $\theta, \psi = \text{constante}$.
- M_{θ} , M_{ψ} tendent à allonger les fibres de l'extrados de la coque.
- $M_{\theta\psi}$ tend à faire tourner la section $\theta = \text{constante}$ dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque l'on regarde suivant $\vec{e}_{\theta}$.

Les efforts et moments sont représentés sur les figures 5 et 6.

Répartition des efforts

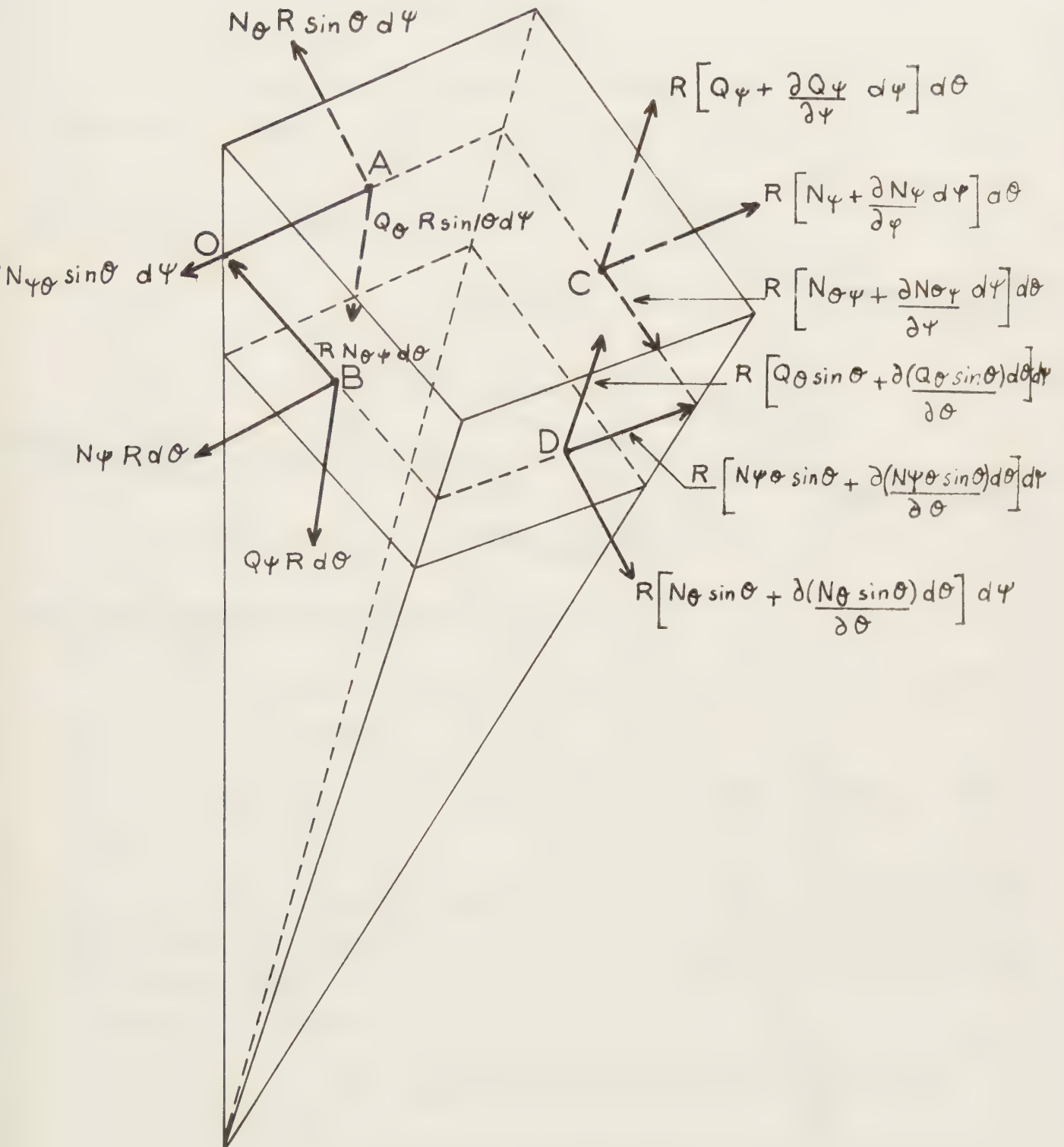


FIGURE : 5

Répartition des moments

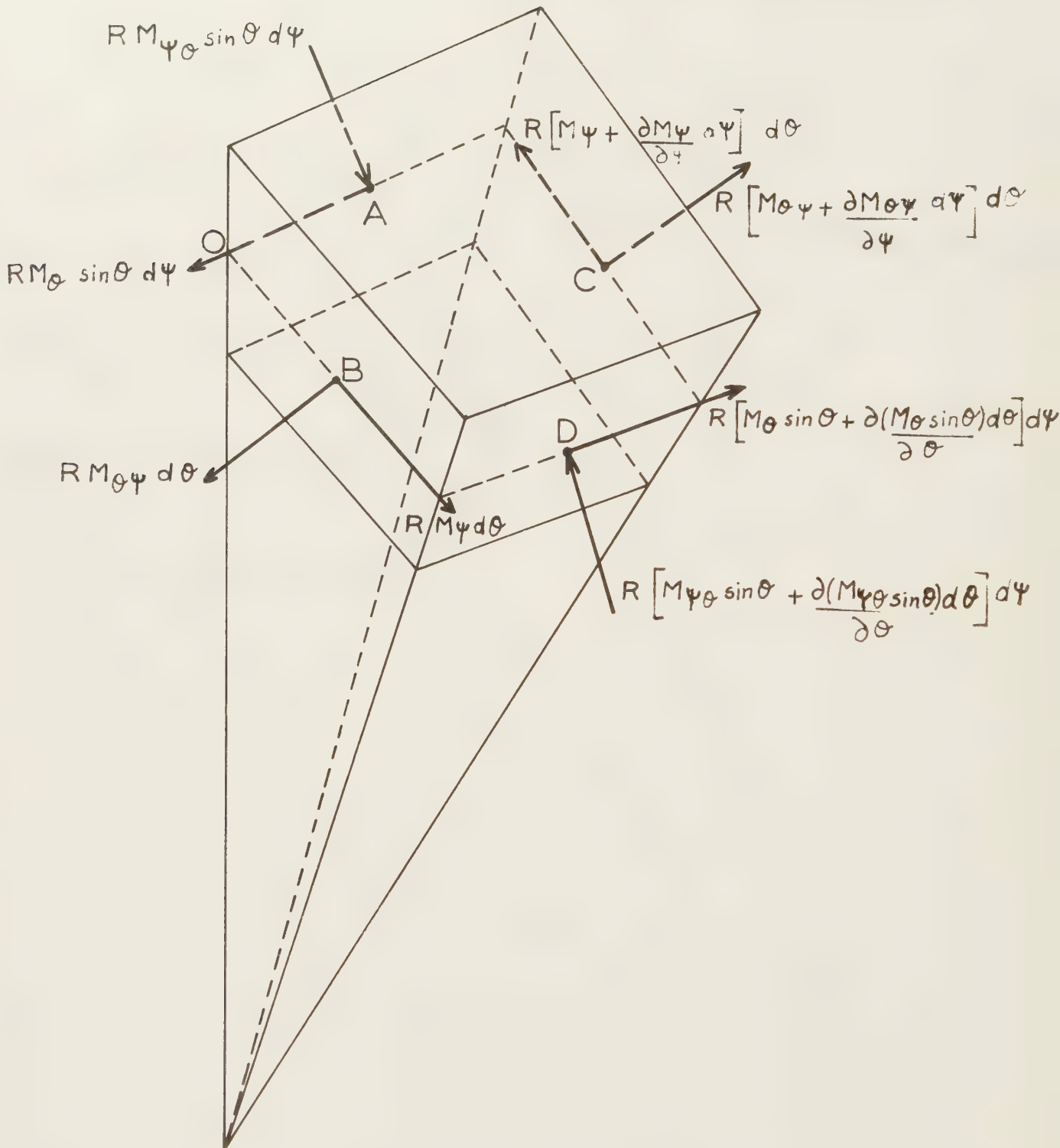


FIGURE : 6

1.3.2.3. - Equations du mouvement

En appliquant les théorèmes généraux et en négligeant le moment dynamique, on obtient les équations du mouvement :

$$\rho h R \sin \theta \ddot{u} = \frac{\partial (Q_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - N_\theta \sin \theta + \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} - N_\psi \sin \theta \quad (1)$$

$$\rho h R \sin \theta \ddot{v} = Q_\theta \sin \theta + \frac{\partial (N_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta\psi}}{\partial \psi} - N_\psi \cos \theta \quad (2)$$

$$\rho h R \sin \theta \ddot{w} = \frac{\partial (N_{\psi\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + Q_\psi \sin \theta + N_{\theta\psi} \cos \theta + \frac{\partial N_\psi}{\partial \psi} \quad (3)$$

$$R (N_{\psi\theta} - N_{\theta\psi}) - M_{\theta\psi} + M_{\psi\theta} = 0$$

$$R Q_\psi - \frac{\partial M_{\psi\theta}}{\partial \theta} - (M_{\theta\psi} + M_{\psi\theta}) \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (4)$$

$$- R Q_\theta + (M_\theta - M_\psi) \cotg \theta + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{\theta\psi}}{\partial \psi} = 0 \quad (5)$$

On constate que la 4ème équation (non numérotée) est une identité due à la dualité $\sigma_{\theta\psi} = \sigma_{\psi\theta}$.

Ces équations sont identiques à celles données par NAGHDI - KALNINS

|10| .

Dans le système d'équations aux dérivées partielles établi ci-dessus apparaissent les déplacements u , v , w d'un point de la surface moyenne, et les contraintes intégrées. Il nous faut donc établir les relations entre contraintes intégrées et déplacements.

1.3.3. Relations contraintes intégrées-déformations

Les relations déformations-déplacements d'un point de la surface moyenne deviennent, compte tenu des hypothèses de calcul :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta})$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{R \sin \theta} (u \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \psi})$$

$$2 \epsilon_{\theta\psi} = 2 \epsilon_{\psi\theta} = \frac{1}{R} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \psi} - w \cotg \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta})$$

En un point situé à la cote z par rapport à la surface moyenne, de déplacements u_z, v_z, w_z , ces relations deviennent :

$$\epsilon_{\theta,z} = \frac{1}{R+z} \left(u_z + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_{\psi,z} = \frac{1}{(R+z)\sin \theta} \left(u_z \sin \theta + v_z \cos \theta + \frac{\partial w_z}{\partial \psi} \right)$$

$$2 \epsilon_{\theta\psi,z} = \frac{1}{R+z} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_z}{\partial \psi} - w_z \cotg \theta + \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right)$$

Exprimons u_z, v_z, w_z en fonction de u, v, w et z . Les hypothèses de calcul nous donnent immédiatement :

$$u_z = u$$

Pour obtenir l'expression de v_z , considérons comme FLÜGGE [6] une section de la coque sphérique suivant un méridien :

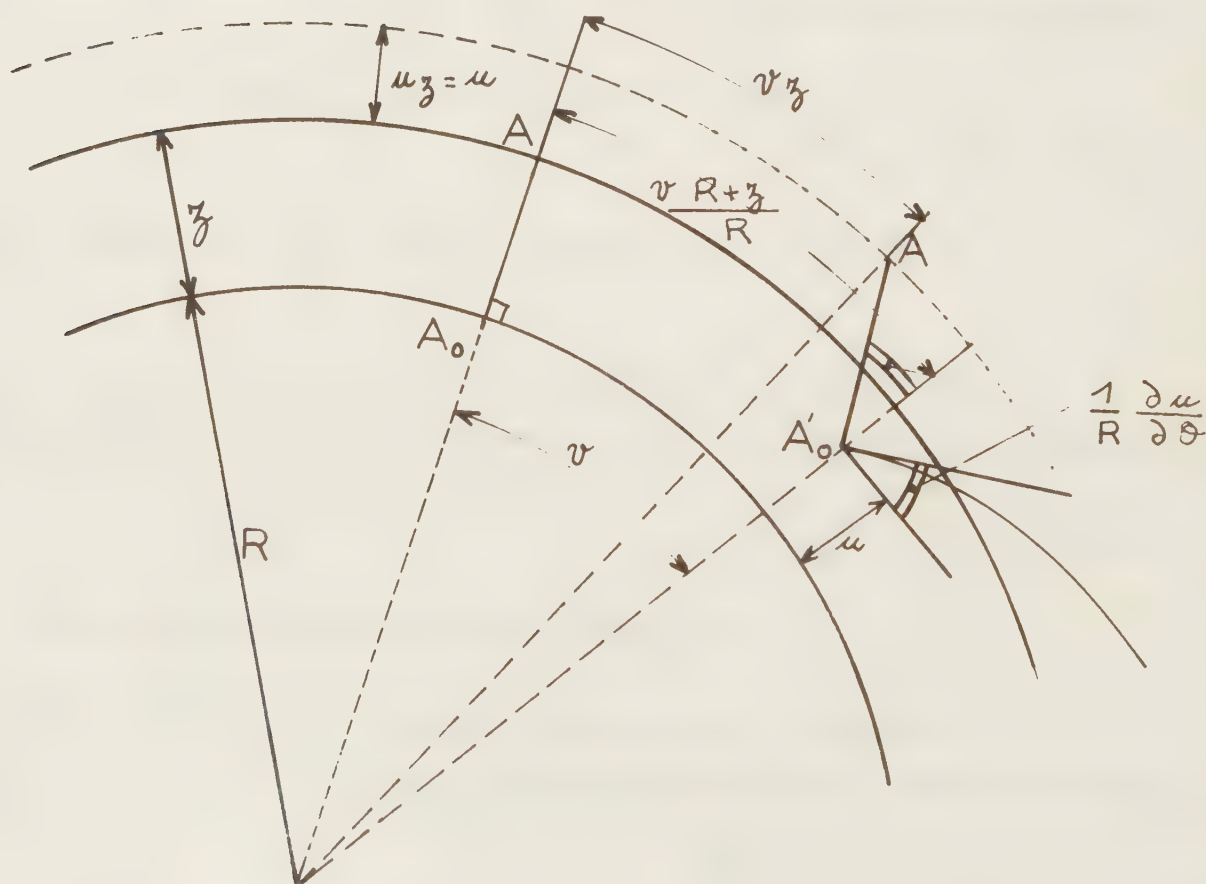


FIGURE 7

Si A_0 se déplace de v sur la surface moyenne, A se déplace de $v \frac{R+z}{R}$, et la normale AA_0 tourne d'une angle de $\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$. On en déduit :

$$v_z = v \frac{R+z}{R} - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Pour obtenir l'expression de w_z , il suffit de considérer une section de coque suivant un parallèle, et d'utiliser un raisonnement analogue à celui qui est fait ci-dessus, pour aboutir à :

$$w_z = w \frac{R+z}{R} - \frac{z}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta,z} &= \frac{1}{R+z} \left| u + \frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right| \\ \epsilon_{\psi,z} &= \frac{1}{(R+z) \sin \theta} \left| u \sin \theta + v \frac{R+z}{R} \cos \theta - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{R+z}{R} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{z}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right| \\ 2\epsilon_{\theta\psi,z} &= \frac{1}{R+z} \left| \frac{1}{\sin \theta} \frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} - w \frac{R+z}{R} \cotg \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{z \cotg \theta}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{R+z}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{z}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} + \frac{z \cos \theta}{R \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right| \end{aligned}$$

En utilisant les définitions même des contraintes intégrées on obtiendra les relations voulues. Nous donnons ci-dessous le calcul de N_θ et de M_θ , qui nous a permis de retrouver les relations données par NAGHDI-KALNINS [10].

Calcul de N_θ :

$$\text{On a } \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\psi)$$

L'intégration donne :

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left| \frac{1}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) + \frac{\nu}{R} (u + v \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \psi}) \right|$$

$$\text{soit : } N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\psi)$$

Calcul de M_θ :

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z \frac{R+z}{R} dz$$

soit :

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left| \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\nu}{R^2} (v \cotg \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}) \right|$$

En posant $M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_\theta + \nu K_\psi)$, on retrouve les mêmes expres-

sions que celles données par NAGHDI-KALNINS [10], et à des termes du second ordre près les expressions que donne SOARE [5] et qu'il appelle les déformations flexionnelles de la surface moyenne. En opérant de même, on obtiendra N_ψ , M_ψ ..., soit :

$$\begin{vmatrix} N_\theta \\ N_\psi \\ N_{\theta\psi} \end{vmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\psi \\ \epsilon_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} N_\psi \\ N_{\theta\psi} \end{vmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} \nu & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_\psi \\ \epsilon_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} N_{\theta\psi} \end{vmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} M_\theta \\ M_\psi \\ M_{\theta\psi} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_\theta \\ K_\psi \\ K_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} M_\psi \\ M_{\theta\psi} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} \nu & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_\psi \\ K_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} M_{\theta\psi} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_{\theta\psi} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\text{avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{R \sin \theta} \left(u \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \quad (13)$$

$$2 \epsilon_{\theta\psi} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \psi} - w \cotg \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (14)$$

$$K_\theta = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (15)$$

$$K_{\psi} = \frac{1}{R^2} \left(v \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \cotg \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (16)$$

$$2 K_{\theta\psi} = \frac{1}{R^2} \left(2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - w \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \quad (17)$$

1.4 - POSITION DU PROBLEME

Les inconnues étant les trois déplacements, les 3 efforts (N), les 3 moments (M), les 3 déformations (ϵ), les 3 déformations flexionnelles (K) et les deux efforts tranchants (Q), nous sommes en présence d'un système différentiel à 17 inconnues avec 17 équations (numérotées de 1 à 17). On peut cependant ramener le problème à un cas simple : celui de la membrane, en écrivant que la rigidité à la flexion est nulle. Ce problème a été résolu par BAKER [7] dans le cas des vibrations axisymétriques pour la sphère complète et par NAGHDI - KALNINS [10] dans le cas des vibrations non symétriques.

Dans le cas où les moments de flexion interviennent, une étude est proposée par NAGHDI - KALNINS [10] dans le cas des vibrations axisymétriques, et certains cas sont résolus dans le cas des vibrations non symétriques.

CHAPITRE II

RESOLUTION PAR DES METHODES ANALYTIQUES

II.1 - CAS DE LA SPHERE LIBRE DANS L'ESPACE

II.1.1 - Membrane (vibrations axisymétriques)

On considère que la coque sphérique est suffisamment mince pour que l'on puisse négliger les moments de flexion et de torsion :

$$M_{\theta} = M_{\psi} = M_{\theta\psi} = 0$$

Les équations (4) et (5) nous donnent alors :

$$Q_{\theta} = Q_{\psi} = 0$$

Les vibrations étant axisymétriques, nous écrivons que les déplacements sont constants en ψ , donc que :

$$w = 0$$

et que les termes dérivés par rapport à ψ sont nuls. L'équation (14) donne $\epsilon_{\theta\psi} = 0$, puis (8) donne $N_{\theta\psi} = 0$. L'équation (3) devient une identité, et finalement les équations (1) et (2) nous donnent :

$$-N_{\theta} - N_{\psi} = \rho h R \ddot{u} \quad (1_1)$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + (N_{\theta} - N_{\psi}) \cotg \theta = \rho h R \ddot{v} \quad (2_1)$$

équations obtenues d'une manière directe par BAKER [7], qui ramène ce système à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} - (v + \cotg^2 \theta) v + (1 + v) \frac{\partial u}{\partial \theta} = A \ddot{v}$$

$$2u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cotg \theta = - \frac{A}{1 + v} \ddot{u}$$

avec
$$A = \frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E}$$

La recherche de solutions sous la forme suivante :

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\theta) \cdot R_n(t)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\theta) \cdot S_n(t)$$

nous conduit au système suivant si $(U_n, V_n) \neq (0, 0)$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{S_n}{AV_n} \left[V_n'' + \cotg \theta V_n' - (\nu + \cotg^2 \theta) V_n \right] + \frac{(1+\nu) U_n'}{A V_n} R_n = \ddot{S}_n \\ \frac{S_n}{AU_n} \left[V_n' + \cotg \theta V_n \right] (1+\nu) + \frac{2(1+\nu)}{A} R_n = -\ddot{R}_n \end{array} \right|$$

où "prime" signifie : dérivation par rapport à θ .

La séparabilité conduit à :

$$\left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \frac{2(1+\nu)}{A} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} S_n \\ R_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \ddot{S}_n \\ -\ddot{R}_n \end{array} \right| \quad (E)$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{V_n'' + \cotg \theta V_n' - (\nu + \cotg^2 \theta) V_n}{A V_n} \quad (a)$$

$$\alpha_2 = \frac{(1+\nu) U_n'}{A V_n} \quad (b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1+\nu}{A} \frac{V_n' + \cotg \theta V_n}{U_n} \quad (c)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des constantes.

L'équation (a), en posant $x = \cos \theta$, devient :

$$(1-x^2) \frac{d^2 V_n}{dx^2} - 2x \frac{dV_n}{dx} + \left(1-\nu - A\alpha_1 - \frac{1}{1-x^2}\right) V_n = 0$$

qui est l'équation de Legendre associée où le paramètre m est égal à 1, si l'on pose

$$\alpha_1 = \frac{1-\nu-n(n+1)}{A} \quad (a_1)$$

Donc si $n \geq 1$, on peut affirmer que les solutions sont les polynômes de Legendre associés pour V_n et les polynômes "simples" pour U_n :

$$U_n(x) = P_n(x)$$

$$V_n(x) = P_n^1(x)$$

et l'on a :

$$\alpha_2 = -\frac{1+\nu}{A} \quad (b_1)$$

$$\alpha_3 = \frac{n(n+1)(1+\nu)}{A} \quad (c_1)$$

Par contre le cas $n = 0$ demande une étude particulière :
les équations (a) et (a₁) donnent :

$$V''_0 + \cotg \theta \cdot V'_0 - (1 + \cotg^2 \theta) V_0 = 0$$

dont la solution est $V_0 = \frac{k_1}{\cos \theta}$, où k_1 est une constante quelconque.

L'élimination de U_n entre (b) et (c) nous donne ensuite :

$$V''_0 + \cotg \theta \cdot V'_0 + \left| \frac{-A^2 \alpha_2 \alpha_3}{(1+\nu)^2} - (1 + \cotg^2 \theta) \right| V_0 = 0$$

On en déduit $\alpha_2 \cdot \alpha_3 = 0$

- Si $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 \neq 0$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} U_0 = k_2 \quad (\text{constante quelconque}) \\ V_0 = \frac{k_1}{\cos \theta} \end{array} \right.$$

et l'utilisation de (c) montre que k_1 est alors nulle.

- Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\alpha_3 = 0$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} U_0 = k_2 \\ V_0 = 0 \end{array} \right.$$

Donc dans tous les cas, on a $V_0 = 0$ et $U_0 = \text{constante}$, c'est-à-dire qu'on trouve le mode purement radial.

Comme $V_n(x) = P_n^{11}(x)$ et que $P_0^1(x) = 0$

et $U_n(x) = P_n(x)$ et que $P_0(x) = 1$

on peut donc dire :

$$\begin{cases} U_n(x) = P_n(x) \\ V_n(x) = P_n^1(x) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Etude des fréquences propres et des formes propres : le système noté E, peut se mettre sous la forme :

$$M \overset{\circ\circ}{X}_n + K X_n = 0$$

avec :

$$X_n = \begin{pmatrix} R_n \\ S_n \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2(1+\nu) & n(n+1)(1+\nu) \\ -(1+\nu) & 1-\nu-n(n+1) \end{pmatrix}$$

Si l'on appelle λ_n les carrés des pulsations propres adimensionnelles, ils seront donnés par :

$$\lambda_0 = 2(1+\nu) \quad \text{si } n = 0$$

$$\text{et par } \det |K - \lambda_n M^*| = 0 \quad \text{si } n \geq 1$$

$$\text{en posant } M = A M^*$$

Soit :

$$2\lambda_n^{\pm} = |1 + 3\nu + n(n+1)| \pm \{ |1 + 3\nu + n(n+1)|^2 - 4(1-\nu^2) |n(n+1) - 2| \}^{1/2} \quad (R1)$$

Les modes propres sont les vecteurs propres de la matrice $K - \lambda_n M$. On aura un mode purement radial pour $n = 0$, et pour $n \geq 1$

$$\begin{vmatrix} 2(1+\nu) - A\lambda_n^{\pm} & n(n+1)(1+\nu) \\ -(1+\nu) & 1-\nu-n(n+1) + A\lambda_n^{\pm} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ S_n \end{pmatrix} = 0$$

On pourra choisir comme vecteur propre le vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - \nu - n(n+1) + A \lambda_n^+}{1 + \nu} \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui nous définira les déplacements radial et tangentiel en tout point.

Nous retrouvons les mêmes résultats que ceux de BAKER [7] en employant une méthode légèrement différente, ce dernier n'ayant pas fait la dissociation du cas $n = 0$ (ce qui lui donne une valeur propre négative, donc un mode propre qu'il appelle imaginaire, et qui en fait n'existe pas) et ayant utilisé la méthode de Laplace au lieu du calcul matriciel pour trouver les fréquences et les formes propres.

Remarquons que l'on trouve le mode rigide de translation lorsque $n = 1$ ($\lambda_1^- = 0$), et que l'on trouve une accumulation de fréquences. Effectivement, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^- = 1 - \nu^2$$

Physiquement il est impossible d'obtenir cette accumulation, la membrane étant uniquement une schématisation théorique (épaisseur nulle).

Notons enfin que le mode purement radial est également donné par d'autres auteurs, en particulier par LOVE [8] COURBON [9] et SHAH - RAMKRISHNAN - DATTA [11].

11.1.2 - Coque sphérique de faible épaisseur

Rappelons les résultats établis par NAGHDI-KALNINS [10]. Nous étudions toujours les vibrations axisymétriques, mais nous ne négligeons plus les moments de flexion et de torsion. En annulant toutes les dérivées par rapport à ψ et le déplacement tangentiel w , les équations (14), (17), (8) et (11) donnent :

$$N_{\theta\psi} = N_{\psi\theta} = M_{\theta\psi} = M_{\psi\theta} = 0$$

Les équations (3) et (4) donnent ensuite :

$$Q_\psi = 0$$

Le système différentiel se ramène alors à :

$$\frac{\partial (Q_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - (N_{\theta} + N_{\psi}) \sin \theta = \rho h R \sin \theta \ddot{u} \quad (1_2)$$

$$Q_{\theta} \sin \theta + \frac{\partial (N_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - N_{\psi} \cos \theta = \rho h R \sin \theta \ddot{v} \quad (2_2)$$

$$- R Q_{\theta} + (M_{\theta} - M_{\psi}) \cotg \theta + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (5_2)$$

auquel il nous faut rajouter les relations contraintes intégrées-déformations simplifiées par la nullité de w et des dérivées par rapport à ψ .

La méthode de résolution utilisée par NAGHDI - KALNINS [10] consiste à réduire ce système à un système de deux équations aux dérivées partielles où les inconnues fondamentales seront le déplacement radial et une fonction de force F .

II.1.2.1. - Expression de l'effort tranchant Q_{θ} :

Elle sera tirée des équations (2₂) et (5₂). En remplaçant les efforts par leurs expressions en fonction des déplacements, et en faisant la différence des équations ainsi obtenues, on obtient :

$$\frac{R^3}{D} Q_{\theta} \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right) = \frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E} \ddot{v} - 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \cotg \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}$$

En notant ∇^2 le laplacien en coordonnées sphériques, qui n'est plus fonction que de θ :

$$\nabla^2 () = \frac{1}{R^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} () + \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \theta} () \right|$$

l'expression de Q_{θ} devient, après avoir négligé $\frac{h^2}{R^2}$ devant l'unité

$$Q_{\theta} = \frac{\rho D (1 - \nu^2)}{E R} \ddot{v} - \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left| \nabla^2 u + \frac{2}{R^2} u \right|$$

11.1.2.2. - Introduction de la fonction de force F (θ, t)

On suppose que le déplacement tangentiel dérive, à une constante multiplicative près, de la fonction F :

$$v = k \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

En remplaçant Q_θ et v par leurs valeurs, l'équation (2₂) donne :

$$\frac{k \rho D (1 - \nu^2)}{ER} \frac{\partial^3 F}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left| \nabla^2 u + \frac{2u}{R^2} \right| + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cotg \theta (N_\theta - N_\psi) = k \rho h R \frac{\partial^3 F}{\partial \theta \partial t^2}$$

En remarquant que :

$$\cotg \theta (N_\theta - N_\psi) = \frac{k E h}{R (1 + \nu)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left| \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + F \right|, \text{ on intègre l'équation}$$

précédente par rapport à θ , ce qui donne, en choisissant convenablement l'origine des temps :

$$\frac{k \rho D (1 - \nu^2)}{ER} \ddot{F} - \frac{D}{R} (\nabla^2 u + \frac{2u}{R^2}) + N_\theta + \frac{k E h}{R (1 + \nu)} \left| \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + F \right| = k \rho h R \ddot{F}$$

En choisissant k de telle manière à ce que l'on ait :

$$k \frac{E h}{R (1 + \nu)} = -1$$

on en tire l'expression de N_θ , puis de N_ψ :

$$N_\theta = \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + F + \frac{D}{R} (\nabla^2 u + \frac{2u}{R^2}) - \frac{\rho R^2 (1 + \nu)}{E} \ddot{F}$$

$$N_\psi = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + F + \frac{D}{R} (\nabla^2 u + \frac{2u}{R^2}) - \frac{\rho R^2 (1 + \nu)}{E} \ddot{F}$$

11.1.2.3. - Equations du mouvement

Les relations contraintes intégrées-déformations entraînent :

$$v = \tg \theta \left| \frac{R}{E h} (N_\psi - \nu N_\theta) - u \right|$$

En comparant cette expression à $v = k \frac{\partial F}{\partial \theta}$, et en utilisant les valeurs de N_θ et de N_ψ , on obtient une première équation aux dérivées partielles en F et u , la seconde étant obtenue à partir de l'équation (1₂)

qui n'avait pas encore été exploitée :

$$\left| R^2 \nabla^2 + (1 - \nu) - \frac{\rho(1 - \nu^2)R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| F + \left| (1 - \nu) \frac{D}{R} \left(\nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) - \frac{Eh}{R} \right| u = 0$$

$$\left| R^2 \left(\nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) + \frac{\rho(1 + \nu)R^2}{E} \left(\frac{h^2}{12} \nabla^2 - 2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| F + \left| DR \left(\nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) + \rho h R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| u = 0$$

11.1.2.4. - Résolution

La recherche de solutions sous la forme

$$\begin{vmatrix} u \\ F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^* \\ F^* \end{vmatrix} \cos \omega t$$

et l'élimination de F entre les deux équations obtenues ci-dessus nous donne l'équation différentielle du sixième ordre en u^* suivante :

$$\begin{aligned} & \nabla^6 u^* + \frac{1}{R^2} \left| 4 + (1 - \nu^2) \Omega^2 \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) \right| \nabla^4 u^* \\ & + \nabla^2 u^* \left| \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2 R^2} (1 - \Omega^2 - (1 + \nu) \Omega^2 \frac{h^2}{12 R^2}) + \frac{4}{R^4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \nu^2) \Omega^2 \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) \right) \right| \\ & + \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2 R^4} \left| 2 + \Omega^2 (1 + 3\nu - (1 - \nu^2) \Omega^2) \right| u^* = 0 \end{aligned}$$

où l'on a fait intervenir la pulsation adimensionnelle

$$\Omega^2 = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E}$$

Nous ne retrouvons pas l'équation donnée par NAGHDI-KALNINS [10], car il semblerait que ces derniers aient négligé l'influence des termes soulignés ci-dessus. Nous négligerons quand à nous les termes en $\frac{h^2}{12 R^2}$ devant l'unité.

On recherche alors les solutions sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Legendre :

$$u^* = \sum_{\alpha=1}^3 U_{\alpha}$$

$$\text{avec } U_{\alpha} = A_{\alpha} P_{n_{\alpha}}(\cos \theta) + B_{\alpha} Q_{n_{\alpha}}(\cos \theta)$$

$$\text{où } n_{\alpha} \text{ sera donné par } n_{\alpha} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\mu_{\alpha} + \frac{1}{4}}$$

les μ_{α} étant solutions de l'équation du 3ème degré, obtenue à partir de l'équations en u^* , après avoir remarqué que l'équation de Legendre peut se mettre sous la forme :

$$R^2 \nabla^2 () = -\mu ()$$

$$\text{avec } \mu = n(n+1)$$

L'équation en μ est alors :

$$\begin{aligned} & \mu^3 - \mu^2 \left| 4 + (1 - v^2) \Omega^2 \right| \\ & + \mu \left| 12 (1 - v^2) \left(\frac{R}{h} \right)^2 (1 - \Omega^2 - (1 + v) \Omega^2 \frac{h^2}{12R^2}) + 4 \left(1 + \frac{1}{2} (1 - v^2) \Omega^2 \right) \right| \\ & - 12 (1 - v^2) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left| 2 + \Omega^2 (1 + 3v - (1 - v^2) \Omega^2) \right| = 0 \end{aligned}$$

Si on ordonne l'équation précédente en Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} & (1 - v^2) \Omega^4 - \Omega^2 \left| 1 + 3v + \mu \left| 1 + (1 + v) \frac{h^2}{12R^2} + 2 \frac{h^2}{12R^2} \right| + \frac{h^2}{12R^2} \mu^2 \right| \\ & - (2 - \mu) - \frac{h^2}{12R^2(1 - v^2)} (-\mu^3 + 4\mu^2 - 4\mu) = 0 \end{aligned}$$

qui est l'équation aux fréquences,

Dans le cas de la sphère libre, si l'on pose

$$\lambda = \Omega^2 (1 - v^2)$$

et

$$\epsilon = \frac{h^2}{12 R^2}$$

les solutions de l'équation aux fréquences sont :

$$2 \lambda^{\pm} = \left| 1 + 3 \nu + \mu (1 + \varepsilon (3 + \nu) + \varepsilon \mu^2) \right| \quad (R2)$$

$$\pm \left\{ \left| 1 + 3 \nu + \mu (1 + \varepsilon (3 + \nu)) + \varepsilon \mu^2 \right|^2 - 4 \left| (1 - \nu^2)(\mu - 2) + \varepsilon \mu (\mu^2 - 4\mu + 4) \right| \right\}^{1/2}$$

Si l'on considère le cas de la membrane, il suffit de remplacer ε par 0 dans les relations ci-dessus, et μ par $n(n+1)$ pour retrouver les relations obtenues par BAKER [7], et référencées (R1) dans notre exposé.

II.1.3. - Epaisseur quelconque

Nous nous bornerons à exposer très succinctement la méthode de SHAH - RAMKRISHNAN - DATTA [11] et reprise par CAMBOU [12]. En partant de l'équation de l'élasticité :

$$(\lambda + 2 \mu) \text{grad } (\vec{H}) + 2 \mu \text{rot } \vec{\omega} + \rho \vec{F} = \rho \ddot{\vec{\xi}}$$

avec $\vec{\omega} = -\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\xi}$

$\vec{F}$ vecteur forces extérieures (nul dans ce cas)

$$\vec{\xi} = u_p \vec{e}_r + v_p \vec{e}_\theta + w_p \vec{e}_\psi$$

En recherchant le vecteur déplacement $\vec{\xi}$ sous la forme de la somme d'un gradient et d'un rotationnel :

$$\vec{\xi} = (\text{grad } K + \text{rot } \vec{H}) e^{j \omega t}$$

on en arrive à rechercher les solutions des équations scalaire et vectorielle de HELMHOLTZ :

$$\Delta K + \alpha^2 K = 0$$

$$\Delta \vec{H} + \beta^2 \vec{H} = 0$$

avec $\alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}$

$$\beta^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$$

Si les solutions de l'équation scalaire de Helmholtz sont bien connues, la résolution de l'équation vectorielle est plus délicate, et a été donnée par MORSE - FESHBACH [14]. Son utilisation, et l'identification des deux valeurs de $\vec{\xi}$ données précédemment nous donne l'expression des déplacements qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_p = a_1 \frac{dR_n(r)}{dr} P_n^m(\cos \theta) \cos m\psi + a_3 \frac{S_n(r)}{\beta r} n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \cos m\psi$$

$$v_p = a_1 \frac{R_n(r)}{r} \frac{d}{d\theta} \left| P_n^m(\cos \theta) \right| \cos m\psi - a_2 m S_n(r) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m\psi \\ + a_3 \frac{1}{\beta r} \frac{d}{dr} \left| r S_n(r) \right| \frac{d}{d\theta} \left| P_n^m(\cos \theta) \right| \cos m\psi$$

$$w_p = -a_1 m \frac{R_n(r)}{r} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m\psi - a_2 S_n(r) \frac{d}{d\theta} \left| P_n^m(\cos \theta) \right| \cos m\psi \\ - a_3 m \frac{1}{\beta r} \frac{d}{dr} \left| r S_n(r) \right| \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m\psi$$

avec $R_n(r) = A_{1n} j_n(\alpha r) + B_{1n} y_n(\alpha r)$

$$S_n(r) = A_{2n} j_n(\beta r) + B_{2n} y_n(\beta r)$$

où j_n, y_n sont les fonctions de Bessel sphériques

P_n^m sont les polynômes de Legendre associés de l'ère espèce

$a_1, a_2, a_3, A_{1n}, A_{2n}, B_{1n}, B_{2n}$ sont des constantes arbitraires.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations déformations-déplacements données en 1.1), on obtient les expressions des contraintes.

L'écriture des conditions aux limites $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\psi} = 0$ sur les faces intérieure et extérieure de la sphère, nous donne alors un système linéaire homogène de six équations à six inconnues $a_1 A_{1n}, a_1 B_{1n}, a_3 A_{2n}, a_3 B_{2n}, a_2 A_{2n}, a_2 B_{2n}$. La recherche de solutions non triviales, nous conduit à l'annulation d'un déterminant 6×6 qui se décompose en

un produit de deux déterminants 4×4 et 2×2 , qui nous donnent respectivement les fréquences et formes propres pour les vibrations couplées en r, θ et en θ, ψ . Notons que CAMBOU [12] a retrouvé les fréquences et formes propres de la membrane en faisant tendre l'épaisseur de la sphère vers 0.

II.2. - CAS DES CALOTTES SPHERIQUES

II.2.1. - Membrane

Les équations du mouvement sont les équations (1₁) et (2₁) du § 2.1.1.)

$$-N_{\theta} - N_{\psi} = \rho h R \ddot{u} \quad (1_1)$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + (N_{\theta} - N_{\psi}) \cotg \theta = \rho h R \ddot{v} \quad (2_1)$$

Les solutions de ces équations sont, comme on l'a vu précédemment :

$$U_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$$

$$V_n(\theta) = P_n^1(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} \left| P_n(\cos \theta) \right|$$

L'introduction des conditions aux limites va imposer des relations sur u et sur v , donc sur les polynômes de Legendre de leurs dérivées, qui seront donc considérés comme fonction de leur indice n . En écrivant ces conditions aux limites, on en déduira les valeurs des n qui ne seront plus entiers, ni forcément réels, et les fréquences propres seront données par les relations (R1) du § 2.1.1. Résolvons par exemple le cas de la demi-sphère posée sur roulettes sur un plan horizontal : ceci impose que l'on ait :

$$v \equiv 0 \quad \left| \quad \theta = \frac{\pi}{2} \right. \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta} \left| P_n(\cos \theta) \right| \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \equiv 0$$

A ce niveau, il nous faut, soit utiliser des formulations approchées des polynômes de Legendre, soit utiliser la définition des polynômes de Legendre à partir de la fonction hypergéométrique de Gauss. La première méthode permet une résolution analytique qui se traduira par des résultats approchés. La seconde méthode nécessite à ce niveau du problème l'emploi de l'ordinateur. En utilisant ici l'approximation de Laplace pour les polynômes de Legendre (utilisée par ROBIN [17] et VOGEL [16]) :

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \cos \left(\frac{2n+1}{2} \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \dots,$$

l'écriture de $\frac{d}{d\theta} \left| P_n(\cos \theta) \right| = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ nous conduit à :

$$n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^*$$

cette approximation n'étant valable que pour n réel > 1 , et le cas $n = 0$ nous donnant le mode purement radial, inchangé en fréquence par rapport à celui obtenu pour la sphère libre. On obtient donc une fréquence sur deux de la sphère libre, à laquelle correspond le mode suivant de la sphère libre. L'examen de ces modes nous conduit à remarquer que nous trouvons tous les modes "symétriques", c'est-à-dire ceux qui ont un déplacement tangentiel nul à l'équateur, ce qui apparaissait comme intuitif a priori ; mais ce qui l'était moins, c'est qu'à ce mode correspond la fréquence propre du mode précédent. Notons que ROSS [15] a fait une étude comparative entre l'utilisation des approximations des polynômes de Legendre et leur formulation réelle, et que les résultats qu'il obtient pour une calotte quelconque avec comme conditions aux limites $v = 0$ sont concordants.

On peut ainsi traiter quelques problèmes concernant la membrane.

II.2.2. - Cas de la coque sphérique de faible épaisseur

Ce cas a également été résolu par NAGHDI - KALNINS [10] qui traitent de la demi-sphère libre. En écrivant que $N_\theta = M_\theta = Q_\theta = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, ils arrivent à un système homogène de 3 équations à 3 inconnues, l'équation aux fréquences étant alors l'écriture de la nullité du déterminant de ce système. Ils en arrivent à des polynômes de Legendre à indices réels et complexes. Dans un autre article [18], ils étudient les calottes avec différentes conditions aux limites en utilisant une formulation différente de celle exposée au § 2.1.2.

CHAPITRE III

Résolution par la méthode des éléments finis

III.1 - INTRODUCTION

III.1.1 - Généralités

Etant donné la formulation mathématique ardue qu'il faut utiliser pour résoudre des problèmes comme l'étude des fréquences et formes propres de calottes sphériques d'épaisseur constante et l'inexistence, à notre connaissance, de résolution de problèmes tels que la sphère posée sur un plan, sur un cercle, ou des problèmes tels que des calottes sphériques d'épaisseur variable, ou posées sur un plan, nous avons appliqué la méthode des éléments finis qui présente l'avantage de pouvoir résoudre les différents cas que nous venons de citer.

L'application de la méthode des éléments finis aux solides de révolution a été introduite par GRAFTON-STROME [21], qui utilisent un élément tronconique et font de la statique. Elle a été reprise par WEBSTER [23] qui utilise un élément courbe et fait de la dynamique. Enfin par DEB NATH [24]. Ce sont, à notre connaissance les seuls travaux donnant comme application le cas de la sphère et des calottes sphériques. Ces derniers ne donnant qu'un exemple d'application dans un cas très particuliers, il nous a semblé utile de bâtir un élément spécifique à la sphère qui permette d'éclaircir certains points (notamment le point singulier qu'est le pôle), de montrer et de vérifier expérimentalement que les fréquences propres les plus basses sont (à l'exception du fondamental) celles que les divers auteurs ne donnent pas, enfin d'attirer l'attention sur certains dangers de la méthode des éléments finis.

III.1.2 - Description de l'élément utilisé

Nous discrétiserons la coque sphérique en n éléments ($i = 1, n$) du type suivant : ("ring élément")

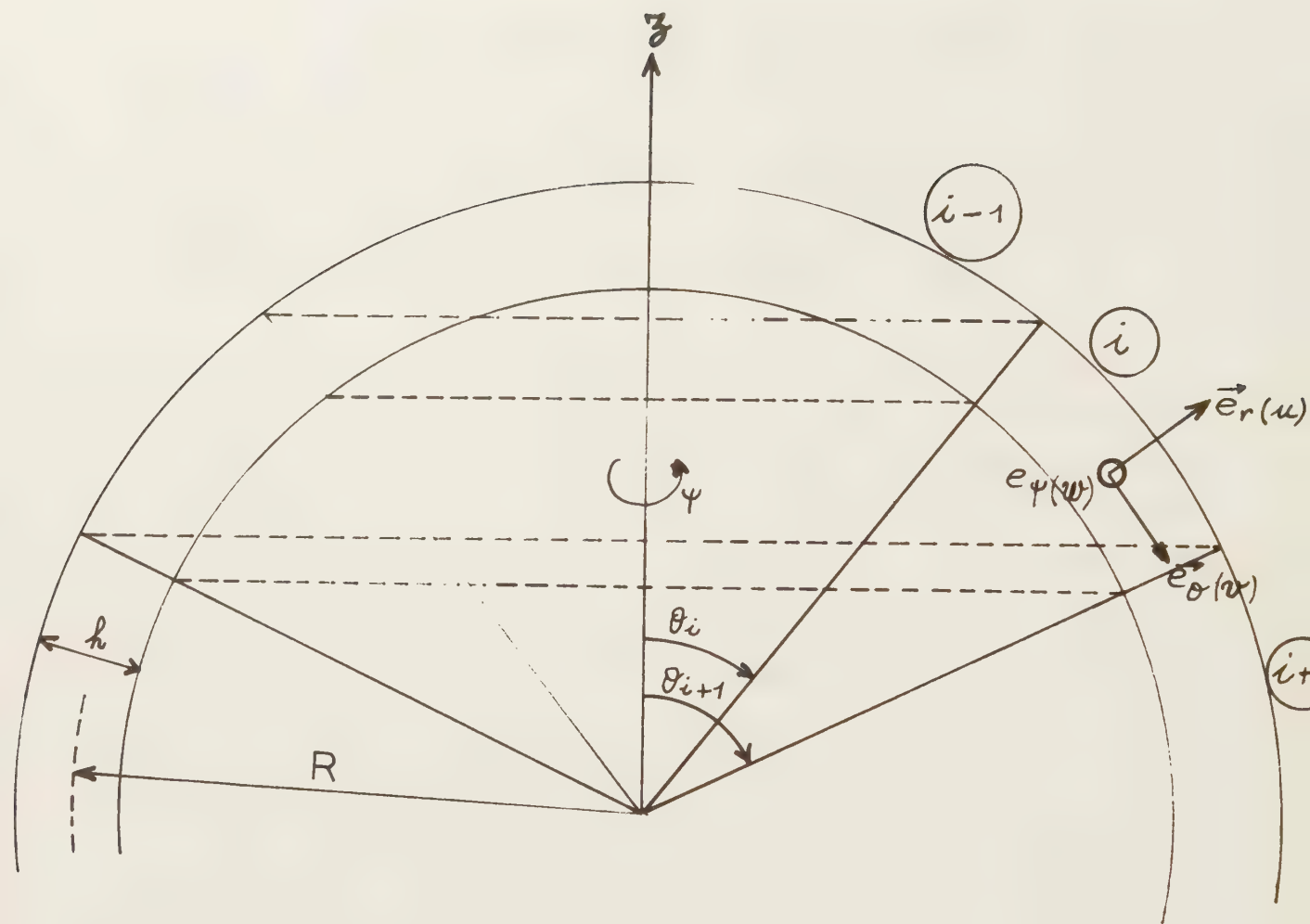


FIGURE : 8

L'état de déformation de l'élément i sera caractérisé par :

$$\bar{Y}_i^{\sim} = \left| \begin{array}{ccc} \bar{u}_i & \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \theta} & \bar{v}_i \\ \bar{v}_i & \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \theta} & \bar{w}_i \\ \bar{w}_i & \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \theta} & \end{array} \right|$$

$$\bar{Y}_{i+1}^{\sim} = \left| \begin{array}{ccc} \bar{u}_{i+1} & \frac{\partial \bar{u}_{i+1}}{\partial \theta} & \bar{v}_{i+1} \\ \bar{v}_{i+1} & \frac{\partial \bar{v}_{i+1}}{\partial \theta} & \bar{w}_{i+1} \\ \bar{w}_{i+1} & \frac{\partial \bar{w}_{i+1}}{\partial \theta} & \end{array} \right|$$

où les déplacements notés avec une barre seront les déplacements des extrémités de l'élément i .

La base considérée sera donc :

$$\bar{Y}_{(i)} = \begin{vmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{Y}_{i+1} \end{vmatrix}$$

Les déplacements en un point quelconque de l'élément i , u_i , v_i , w_i seront comptés suivant le repère local $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\psi$. Nous calculerons l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de chaque élément qui pourront se mettre sous la forme :

$$2E_{c,i} = \dot{\bar{Y}}_{(i)}^T \mu_i \dot{\bar{Y}}_{(i)}$$

$$2E_{p,i} = \bar{Y}_{(i)}^T \gamma_i \bar{Y}_{(i)}$$

Les énergies cinétique et potentielle du système étant égales à la somme des énergies cinétique et potentielle du système discrétisé, nous aurons :

$$2E_c = \sum_{i=1}^n 2E_{c,i} = \dot{\bar{Y}}^T \mu \dot{\bar{Y}}$$

$$2E_p = \sum_{i=1}^n 2E_{p,i} = \bar{Y}^T \gamma \bar{Y}$$

avec :

$$\bar{Y} = \begin{vmatrix} \bar{Y}_{(1)} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{(i)} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{(n)} \end{vmatrix}$$

les matrices μ et γ étant des assemblages des matrices élémentaires μ_i et γ_i , et l'équation régissant le mouvement d'oscillations libres étant :

$$\mu \ddot{\bar{Y}} + \gamma \bar{Y} = 0$$

III.1.3. - Choix des déformées dynamiques

Nous choisirons pour chaque élément i des déformées dynamiques de la forme suivante :

$$u_i(\theta, t) = (a_{i,1}(t) + a_{i,2}(t) \cdot \theta + a_{i,3}(t) \cdot \theta^2 + a_{i,4}(t) \cdot \theta^3) \cos m \psi$$

$$v_i(\theta, t) = (a_{i,5}(t) + a_{i,6}(t) \cdot \theta + a_{i,7}(t) \cdot \theta^2 + a_{i,8}(t) \cdot \theta^3) \cos m \psi$$

$$w_i(\theta, t) = (a_{i,9}(t) + a_{i,10}(t) \cdot \theta + a_{i,11}(t) \cdot \theta^2 + a_{i,12}(t) \cdot \theta^3) \sin m \psi$$

sauf au pôle où nous aurons un élément particulier.

III.2 - CALCUL DES ENERGIES DE L'ELEMENT i

III.2.1. - Energie cinétique

Nous avons l'énergie cinétique de translation, et l'énergie cinétique de rotation.

Pour exprimer l'énergie cinétique de rotation, nous assimilerons un élément de coque d'angles au centre $d\theta$ et $d\psi$, à une barre d'épaisseur négligeable et de longueur h , qui tourne, lors de la déformation, de :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \text{ par rapport à } \vec{e}_\psi \quad \text{et} \quad \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi} \text{ par rapport à } \vec{e}_\theta$$

(voir § I.3.3. figure 7).

Nous aurons donc :

$$2E_{ci} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \{ (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{h^2}{12R^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \psi} \right)^2 \right] \} dm$$

III.2.2. - Energie potentielle de déformation

On sait que l'on a $2 E_p = \iiint_{\mathcal{C}} \bar{\Sigma} : \bar{E} d\mathcal{C}$ où $\bar{\Sigma}$ est le tenseur des contraintes et $\bar{E}$ le tenseur des déformations.

En utilisant les contraintes intégrées, on obtient :

$$2E_p = \iint_S (N_\theta \epsilon_\theta + N_\psi \epsilon_\psi + M_\theta K_\theta + M_\psi K_\psi) dS$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle de l'élément i :

$$2E_{p_i} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left\{ R^2 \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta^2 + \epsilon_\psi^2 + 2\nu \epsilon_\theta \epsilon_\psi + 2(1-\nu)\epsilon_\theta^2) \right. \\ \left. + R^2 \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_\theta^2 + K_\psi^2 + 2\nu K_\theta K_\psi + 2(1-\nu)K_\theta^2) \right\} \sin \theta d\theta d\psi$$

soit :

$$2E_{p_i} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left\{ 2u_i^2 (1+\nu) + 2u_i \frac{\partial v_i}{\partial \theta} (1+\nu) + 2u_i v_i \cotg \theta (1+\nu) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right)^2 + v_i^2 \cotg^2 \theta + 2 \frac{u_i}{\sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} (1+\nu) + 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} v_i \frac{\partial w_i}{\partial \psi} \right. \\ \left. + 2\nu \cotg \theta v_i \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{\sin \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} + \frac{1-\nu}{2\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \psi} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \cotg^2 \theta w_i^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right)^2 - (1-\nu) w_i \frac{\partial v_i}{\partial \psi} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{\sin \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} - (1-\nu) \cotg \theta w_i \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h^2}{12R^2} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right)^2 - 2 \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right)^2 + v_i^2 \cotg^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \psi} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{1}{\sin^4 \theta} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \right)^2 + \cotg^2 \theta \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} v_i \frac{\partial w_i}{\partial \psi} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \\
 & - 2 \cotg^2 \theta v_i \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - \frac{2}{\sin^3 \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \\
 & + \frac{2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} + 2 v_i (\cotg \theta \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \\
 & - \cotg \theta \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - \cotg \theta v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \\
 & + \cotg \theta \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2}) + \frac{1-v}{2} (-8 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{\partial u_i}{\partial \psi} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial \psi} + 4 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_i}{\partial \psi} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \\
 & - 4 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} w_i \frac{\partial u_i}{\partial \psi} + 4 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{\partial u_i}{\partial \psi} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} - \frac{4}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + 4 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} w_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial \psi} \\
 & - \frac{4}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial \psi} - 2 \cotg \theta w_i \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \psi} \\
 & \left. - 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} w_i \frac{\partial v_i}{\partial \psi} \right) \} \sin \theta d \theta d \psi
 \end{aligned}$$

III.2.3. - Définition des intégrales

L'examen des expressions des énergies nous conduit à définir les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_{n,i} &= \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \sin \theta d \theta \\
 J_{n,i} &= \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \cos \theta d \theta
 \end{aligned}$$

$$K_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\theta^n}{\sin \theta} d\theta$$

$$L_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (= K_{n,i} - I_{n,i})$$

$$M_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \cotg \theta d\theta$$

$$N_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n d\theta$$

$$O_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$P_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta$$

$$Q_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$R_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \cotg^2 \theta d\theta \quad (= O_{n,i} - N_{n,i})$$

$$S_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta \quad (= P_{n,i} - K_{n,i})$$

On peut remarquer que ψ n'intervient pas. Effectivement, on ne trouve que des termes en $\cos^2 \psi$ ou $\sin^2 \psi$ qui donnent π en intégrant.

Enfin, le lecteur intéressé trouvera en annexe la méthode de calcul utilisé pour toutes ces intégrales (formules de récurrence, intégration numérique, formules approchées, suivant les cas).

III.3 - EXPRESSION DES MATRICES DE L'ELEMENT GENERAL

Les pôles étant des points singuliers, (comme nous l'avons déjà remarqué dans les méthodes analytiques), nous distinguerons l'élément général, et l'élément particulier comportant le pôle (calotte).

III.3.1. - Matrices masse et raideur élémentaires

Si l'on pose :

$$\tilde{A}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,12})$$

on peut définir les matrices masse et raideur dans la base des déformées admissibles.

Un examen des expressions des énergies nous montre qu'on peut mettre ces matrices sous la forme :

$$\mathcal{M}_i = \pi R^2 h \rho \left(M_i + \frac{h^2}{12 R^2} M_i^* \right) \quad \text{pour la matrice masse}$$

$$\mathcal{K}_i = \frac{\pi E h}{1 - \nu^2} \left(K_i + \frac{h^2}{12 R^2} K_i^* \right) \quad \text{pour la matrice raideur}$$

Nous nous bornerons à donner ces différentes matrices afin d'épargner au lecteur les développements de fastidieux calculs.

La matrice M_i peut se mettre sous la forme :

$$M_i = \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{vmatrix}$$

avec :

$$m_i = \begin{vmatrix} I_0 & & & & & \\ & I_1 & & & & \\ & & I_2 & & & \\ & & & I_3 & & \\ & & & & I_4 & \\ & & & & & I_5 \\ & & & & & & I_6 \end{vmatrix} \quad \text{symétrique}$$

La matrice M_i^* se met sous la forme :

$$M_i^* = \begin{vmatrix} m_i^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

avec :

$$m_i^* = \begin{vmatrix} m^2 K_0 & & & & & \\ & I_0 + m^2 K_1 & & & & \\ & & 2I_1 + m^2 K_3 & & & \\ & & & 4I_2 + m^2 K_4 & & \\ & & & & 6I_3 + m^2 K_5 & \\ & & & & & 9I_4 + m^2 K_6 \end{vmatrix} \quad \text{symétrique}$$

Afin de ne pas trop surcharger l'écriture des matrices masse et raideur, nous ne mettrons pas l'indice i caractérisant l'élément dans les intégrales.

Si nous revenons à l'expression de l'énergie de déformation nous pouvons la mettre sous la forme d'une somme (1) de termes contenant uniquement des produits entre les déplacements tangentiels et leurs dérivées, et d'une somme (2) contenant des produits où figurent le déplacement radial et ses dérivées. On constate alors que dans la somme (1)

on peut mettre $1 + \frac{h^2}{12 R^2}$ en facteur alors qu'on ne peut pas le faire

dans la somme (2). La matrice raideur pourra donc se mettre sous la forme suivante :

$$K_i + \frac{h^2}{12 R^2} K_i^*$$

avec :

$$K_i^* = \underbrace{\overline{\overline{K_i^*}}}_{4} + \underbrace{\overline{\overline{K_i}}}_{8}$$

$\overline{\overline{K_i}}$ étant identique à la sous-matrice 8×8 tirée de K_i . Nous donnons pages suivantes les matrices K_i et K_i^* .

[illegible]

$m^4 P_0 + 2m^2(1-V)S_0$				
$m^4 P_1 + m^2(2V-3)Q_0$ $+ 2m^2(1-V)S_1$	$L_0 + 2m^2(1-V)K_0$ $+ m^4 P_2 + 2m^2(2V-3)Q_1$ $+ 2m^2(1-V)S_2$		Symétrique	
$-2m^2 V K_0 + m^4 P_2$ $+ 2m^2(2V-3)Q_1$ $+ 2m^2(1-V)S_2$	$2VJ_0 + 2L_1$ $+ 2m^2(2-3V)K_1$ $+ m^4 P_3 + 3m^2(2V-3)Q_2$ $+ 2m^2(1-V)S_3$	$4I_0 + 8VJ_1 + 4L_2$ $+ 4m^2(2-3V)K_2$ $+ m^4 P_4 + 4m^2(2V-3)Q_3$ $+ 2m^2(1-V)S_4$		
$-6m^2 V K_1 + m^4 P_3$ $+ 3m^2(2V-3)Q_2$ $+ 2m^2(1-V)S_3$	$6VJ_1 + 3L_2$ $+ 6m^2(1-V)K_2$ $+ m^4 P_4 + 4m^2(2V-3)Q_3$ $+ 2m^2(1-V)S_4$	$12I_1 + 18VJ_2 + 6L_3$ $+ 4m^2(3-5V)K_3$ $+ m^4 P_5 + 5m^2(2V-3)Q_4$ $+ 2m^2(1-V)S_5$	$36I_2 + 36VJ_3 + 9L_4$ $+ 6m^2(3-5V)K_4$ $+ m^4 P_6 + 6m^2(2V-3)Q_5$ $+ 2m^2(1-V)S_6$	
$m^2(2-V)Q_0$	$-L_0 - m^2(1-V)K_0$ $+ m^2(2-V)Q_1$	$-2VJ_0 - 2L_1$ $- 2m^2(1-V)K_1$ $+ m^2(2-V)Q_2$	$-6VJ_1 - 3L_2$ $- 3m^2(1-V)K_2$ $+ m^2(2-V)Q_3$	
$m^2 V K_0$ $+ m^2(2-V)Q_1$	$-VJ_0 - L_1$ $+ m^2(2V-1)K_1$ $+ m^2(2-V)Q_2$	$-2I_0 - 4VJ_1 - 2L_2$ $+ m^2(3V-2)K_2$ $+ m^2(2-V)Q_3$	$-6I_1 - 9VJ_2 - 3L_3$ $+ m^2(4V-3)K_3$ $+ m^2(2-V)Q_4$	
$2m^2 V K_1$ $+ m^2(2-V)Q_2$	$-2VJ_1 - L_2$ $+ m^2(3V-1)K_2$ $+ m^2(2-V)Q_3$	$-4I_1 - 6VJ_2 - 2L_3$ $+ 2m^2(2V-1)K_3$ $+ m^2(2-V)Q_4$	$-12I_2 - 12VJ_3 - 3L_4$ $+ m^2(5V-3)K_4$ $+ m^2(2-V)Q_5$	
$3m^2 V K_2$ $+ m^2(2-V)Q_3$	$-3VJ_2 - L_3$ $+ m^2(4V-1)K_3$ $+ m^2(2-V)Q_4$	$-6I_2 - 8VJ_3 - 2L_4$ $+ m^2(5V-2)K_4$ $+ m^2(2-V)Q_5$	$-18I_3 - 15VJ_4 - 3L_5$ $+ m^2(6V-3)K_5$ $+ m^2(2-V)Q_6$	
$m^3 O_0$ $+ m(1-V)R_0$	$-m(2-V)\Pi_0$ $+ m^3 O_1$ $+ m(1-V)R_1$	$-2mVN_0$ $- 2m(2-V)\Pi_1$ $+ m^3 O_2 + m(1-V)R_2$	$-6mVN_1$ $- 3m(2-V)\Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-V)R_3$	
$-m(1-V)\Pi_0$ $+ m^3 O_1$ $+ m(1-V)R_1$	$m(1-V)N_0$ $- m(3-2V)\Pi_1$ $+ m^3 O_2 + m(1-V)R_2$	$2m(1-V)N_1$ $- m(5-3V)\Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-V)R_3$	$3m(1-V)N_2$ $- m(7-4V)\Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-V)R_4$	
$-2m(1-V)\Pi_1$ $+ m^3 O_2$ $+ m(1-V)R_2$	$2m(1-V)N_1$ $- m(4-3V)\Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-V)R_3$	$2m(2-3V)N_2$ $- m(6-4V)\Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-V)R_4$	$3m(2-4V)N_3$ $- m(8-5V)\Pi_4$ $+ m^3 O_5 + m(1-V)R_5$	
$-3m(1-V)\Pi_2$ $+ m^3 O_3$ $+ m(1-V)R_3$	$3m(1-V)N_1$ $- m(5-4V)\Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-V)R_4$	$2m(3-4V)N_3$ $- m(7-5V)\Pi_4$ $+ m^3 O_5 + m(1-V)R_5$	$3m(3-5V)N_4$ $- m(9-6V)\Pi_5$ $+ m^3 O_6 + m(1-V)R_6$	

III.3.2. - Matrice de passage

Pour raccorder les différents éléments, il nous faut les matrices μ_i et γ_i dans la base $\bar{Y}_{(i)}$.

Nous avons :

$$A_i = T_i \bar{Y}_{(i)}$$

T_i étant telle que

$$T_i^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (2 \times 4)_i & & 0 \\ \hline & (2 \times 4)_i & \\ \hline & 0 & (2 \times 4)_i \\ \hline (2 \times 4)_{i+1} & & \\ \hline & (2 \times 4)_{i+1} & \\ \hline 0 & & (2 \times 4)_{i+1} \\ \hline \end{array}$$

Avec :

$$(2 \times 4)_i = \begin{vmatrix} 1 & \theta_i & \theta_i^2 & \theta_i^3 \\ 0 & 1 & 2\theta_i & 3\theta_i^2 \end{vmatrix}$$

les matrices $(2 \times 4)_{i+1}$ s'obtenant à partir des matrices $(2 \times 4)_i$ en remplaçant θ_i par θ_{i+1} . Afin d'éviter des erreurs successives lors du calcul final sur ordinateur, nous avons préféré inverser directement la matrice T_i^{-1} :

on obtient alors :

$$T_i = \frac{1}{(\theta_{i+1} - \theta_i)^4} \begin{vmatrix} \boxed{(4 \times 2)_i} & & \boxed{(4 \times 2)_{i+1}} & & 0 \\ & \boxed{(4 \times 2)_i} & & 0 & \boxed{(4 \times 2)_{i+1}} \\ 0 & & \boxed{(4 \times 2)_i} & & \\ & & & & \boxed{(4 \times 2)_{i+1}} \end{vmatrix}$$

Avec :

$$(4 \times 2)_i = \begin{vmatrix} \theta_{i+1}^4 - 4\theta_i \theta_{i+1}^3 + 3\theta_i^2 \theta_{i+1}^2 & -\theta_i \theta_{i+1}^2 (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \\ 6\theta_i \theta_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i) & \theta_{i+1}^4 - 3\theta_i^2 \theta_{i+1}^2 + 2\theta_{i+1} \theta_i^3 \\ 3(\theta_i^2 - \theta_{i+1}^2) & -2\theta_{i+1}^3 - \theta_i^3 + 3\theta_i \theta_{i+1}^2 \\ 2(\theta_{i+1} - \theta_i) & (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \end{vmatrix}$$

les sous-matrices $(4 \times 2)_{i+1}$ s'obtenant à partir des sous-matrices $(4 \times 2)_i$ en remplaçant θ_i par θ_{i+1} et réciproquement.

Les matrices masse et raideur dans la base des déplacements s'obtiendront finalement par :

$$\begin{aligned} \mu_i &= T_i \tilde{\mathcal{M}}_i T_i \\ \gamma_i &= T_i \tilde{\mathcal{K}}_i T_i \end{aligned}$$

III.4 - CAS PARTICULIER DU POLE

III.4.1 - Le point singulier

Nous ne traiterons que le cas du pôle nord ($\theta = 0$), le cas particulier du pôle sud pouvant s'en déduire aisément. Ce cas a déjà attiré l'attention des auteurs que nous avons cités qui le résolvent

de la manière suivante : WEBSTER [23] constate qu'il y a des termes infinis au pôle, donc préconise de prendre des développements des déplacements commençant aux termes du second degré. DEB NATH [24] conseille de ne pas utiliser d'élément particulier, et de faire calculer ces intégrales par une méthode d'intégration numérique qui n'utilise pas la valeur de la fonction au pôle. Il a donc une valeur fausse pour ses intégrales, mais comme toutes les intégrales qui sont infinies au pôle apparaissent dans la matrice K_i^* , cette valeur comporte en facteur $\frac{h^2}{12 R^2}$ qui est très petit, et ne perturbe pas trop le terme correspondant de K_i .

Nous écrivons quant à nous, pour que le pôle ne soit pas un point singulier, il faut que les déformations soient finies en ce point. Soit :

$$\begin{array}{l} \varepsilon_\theta, \varepsilon_\psi, \varepsilon_{\theta\psi} \\ K_\theta, K_\psi, K_{\theta\psi} \end{array} \quad \text{finis pour } \theta = 0$$

En revenant aux relations (12) à (17) (§ 13) on en déduit :

$$\begin{array}{ll} v_i = 0 \Big|_{\theta=0} & a_{5,i} = 0 \\ w_i = 0 \Big|_{\theta=0} & a_{9,i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial \theta} = 0 \Big|_{\theta=0} & a_{2,i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial \psi} = 0 \Big|_{\theta=0} & m. a_{1,i} = 0 \end{array}$$

Les déformées dynamiques de la calotte comportant le pôle seront alors, si $m \neq 0$:

$$\begin{array}{l} u_1 = (a_{1,3} \theta^2 + a_{1,4} \theta^3) \cos m \psi \\ v_1 = (a_{1,6} \theta + a_{1,7} \theta^2 + a_{1,8} \theta^3) \cos m \psi \\ w_1 = (a_{1,10} \theta + a_{1,11} \theta^2 + a_{1,12} \theta^3) \sin m \psi \end{array}$$

Le pôle ne peut donc avoir aucun déplacement dans les modes non symétriques ($m \neq 0$), et ne peut avoir qu'un déplacement radial dans les vibrations axisymétriques ($m = 0$).

Par contre, il n'y a aucune raison de prendre des développements commençant à l'ordre 2 pour les déplacements tangentiels dans les deux types de modes définis ci-dessus.

III.4.2 - Matrices masse et raideur élémentaires

Il nous suffit alors, pour obtenir les matrices masse et raideur de la calotte comportant le pôle nord, de supprimer les lignes et colonnes 1, 2, 5 et 9 des matrices masse et raideur de l'élément général, et d'indicer correctement les intégrales.

Nous donnons en annexe un schéma des matrices où figurent entourés les termes contenant des intégrales qui sont infinies au pôle et qui disparaissent du fait de l'opération précédente, ainsi que les expressions de ces intégrales.

III.4.3 - Matrice de passage

$$\text{On a } \bar{Y}(1) = T_1^{-1} A_1$$

$$\text{avec } \bar{Y}(1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \theta} & \bar{u}_2 & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \theta} & \bar{v}_2 & \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \theta} & \bar{w}_2 & \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } A_1 = (\tilde{a}_{1,3}, \tilde{a}_{1,4}, \tilde{a}_{1,6}, \tilde{a}_{1,7}, \tilde{a}_{1,8}, \tilde{a}_{1,10}, \tilde{a}_{1,11}, \tilde{a}_{1,12})$$

L'inversion de T_1^{-1} donne alors : ($\theta_1 = 0$)

$$T_1 = \frac{1}{\theta_2^3}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2^3 & & & & & & & \\ -3\theta_2 & & 3\theta_2 & -\theta_2^2 & & & & \\ 2 & & -2 & \theta_2 & & & & \\ & \theta_2^3 & & & & & & \\ & -2\theta_2^2 & & 3\theta_2 & -\theta_2^2 & & & \\ & \theta_2 & & -2 & \theta_2 & & & \\ & & \theta_2^3 & & & & & \\ & & -2\theta_2^2 & & & 3\theta_2 & -\theta_2^2 & \\ & & \theta_2 & & & -2 & \theta_2 & \end{bmatrix}$$

III .5.1 - Découplage du système

On constate que dans le cas où $m = 0$, la matrice $\mathcal{K}_i$ se découple de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{i(u,v)} & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{i(w)} \end{bmatrix}$$

Au vu de la forme de la matrice $\mathcal{T}_i$, on en déduit que le système se découple en deux sous-systèmes :

- vibrations avec déplacements en u, v (r, θ)
- vibrations avec déplacement en w (ψ)

les premières que nous appellerons vibrations axisymétriques pures (couplées en r, θ), les secondes qui sont les vibrations de torsion pure.

Ces dernières étant très difficiles à obtenir expérimentalement donc beaucoup moins gênantes que les premières, il nous est apparu intéressant de traiter uniquement le cas des vibrations axisymétriques, à partir d'un élément simplifié, qui permet de réduire notablement la taille des matrices finales.

III.5.2 - Elément simplifié (m = 0)

Les déplacements restants étant u et v, il est possible de se borner à raccorder uniquement les deux déplacements et la rotation de la normale en u. Le vecteur déformation sera donc :

$$\tilde{Y}(i) = (\bar{u}_i, \bar{v}_i, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \theta}, \bar{u}_{i+1}, \bar{v}_{i+1}, \frac{\partial \bar{u}_{i+1}}{\partial \theta})$$

et les déformées dynamiques admissibles seront :

$$u_i(\theta, t) = a_{i,1}(t) + a_{i,2}(t) \theta + a_{i,3}(t) \theta^2 + a_{i,4}(t) \theta^3$$

$$v_i(\theta, t) = a_{i,5}(t) + a_{i,6}(t) \theta$$

pour l'élément général.

III.5.2.1. - Energies de l'élément i

L'énergie cinétique se ramène à

$$2E_{c,i} = 2 \pi R^2 h \rho \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\dot{\bar{u}}_i^2 + \dot{\bar{v}}_i^2 + \frac{h^2}{12 R^2} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \theta})^2) \sin \theta d \theta$$

L'énergie potentielle à .

$$2E_{p,i} = 2 \pi R^2 \frac{Eh}{1 - \nu^2} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left\{ \left| (u_i + v_i \cotg \theta)^2 + \left(u_i + \frac{\partial v_i}{\partial \theta}\right)^2 + 2 \nu (u_i + v_i \cotg \theta) \left(u_i + \frac{\partial v_i}{\partial \theta}\right) \right| + \frac{h^2}{12 R^2} \left| \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2}\right)^2 + \cotg^2 \theta \left(v_i - \frac{\partial u_i}{\partial \theta}\right)^2 + 2 \nu \cotg \theta \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2}\right) \left(v_i - \frac{\partial u_i}{\partial \theta}\right) \right| \right\} \sin \theta d \theta$$

III.5.2.2. - Matrices masse et raideur élémentaires

Elles s'obtiennent toutes à partir des matrices données pages 41 et 42 , en extrayant les sous matrices supérieures d'ordre 6 x 6, et en y faisant $m = 0$. On constate que si les termes des matrices M_i , M_i^* , et K_i sont peu modifiés, il n'en est pas de même de la matrice $\overline{K}_i^*$ qui se trouve très simplifiée.

Il reste pour $\overline{K}_i^*$:

$$K_i^* = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & & & \\ \hline 0 & L_0 & & \\ \hline 0 & 2L_1 + 2\nu J_0 & 4I_0 + 8\nu J_1 + 4L_2 & \\ \hline 0 & 3L_2 + 6\nu J_1 & 12I_1 + 18\nu J_2 + 6L_3 & 36I_2 + 36\nu J_3 + 9L_4 \\ \hline 0 & -L_0 & -2L_1 - 2\nu J_0 & -3L_2 - 6\nu J_1 \\ \hline 0 & -L_1 - \nu J_0 & -2I_0 - 2L_2 - 4\nu J_1 & -6I_1 - 3L_3 - 9\nu J_2 \\ \hline \end{array}$$

On constate donc que n'interviennent plus les intégrales que nous avons baptisées $M_{n,i}$, $N_{n,i}$, $O_{n,i}$, $P_{n,i}$, $Q_{n,i}$, $R_{n,i}$, $S_{n,i}$, et qu'il ne reste que quatre types d'intégrales.

L'avantage de l'élément simplifié apparaît donc évidemment : il n'est point nécessaire de faire calculer toutes ces intégrales, et les expressions de la matrice raideur finale sont beaucoup plus simples. D'où une diminution de taille en mémoire utilisée, de temps de calcul, donc de coût lors du calcul final sur ordinateur.

III.5.2.3. - Cas du pôle

Nous écrivons que pour $\theta = 0$ le déplacement tangentiel et la rotation de la normale en θ sont nuls, ceci pour les mêmes raisons que celles indiquées au § III.4.1. Il nous reste donc pour le pôle un déplacement purement radial.

Les matrices masse et raideur élémentaires s'obtiennent alors en supprimant les lignes et colonnes 2 et 5 des matrices de l'élément général précédent.

Dans le cas de la sphère complète, il nous faut également les matrices de la calotte comportant le pôle sud. Deux solutions alors : ou faire le changement de variable $\Psi = \pi - \theta$ et se ramener aux matrices de la calotte comportant le pôle nord, ou écrire que v et $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ sont nuls pour $\theta = \pi$ et conserver toujours la même définition de l'angle, ce qui revient à changer les déformées dynamiques.

Le lecteur trouvera en annexe les matrices particulières à ce deuxième cas.

III.5.2.4. - Matrices de passage

Elles sont également données en annexe.

111.5.3. - Remarque sur le choix des déformées dynamiques

On peut s'étonner que nous ne prenions que des développements en $\cos m \psi$ pour les déplacements u et v et en $\sin m \psi$ pour le déplacement w . Effectivement ce choix assure bien la complétude de l'espace des fonctions admissibles. Supposons que l'on ait pris :

$$u_i = P_1(\theta) \cos m \psi + P_4(\theta) \sin m \psi$$

$$v_i = P_2(\theta) \cos m \psi + P_5(\theta) \sin m \psi$$

$$w_i = P_3(\theta) \sin m \psi + P_6(\theta) \cos m \psi$$

où les $P_i(\theta)$ sont des cubiques en θ .

La forme des énergies est telle qu'apparaîtront en plus des intégrales du type $\int_0^{2\pi} \cos^2 m \psi d\psi$ ou $\int_0^{2\pi} \sin^2 m \psi d\psi$ des intégrales du type $\int_0^{2\pi} \cos m \psi \sin m \psi d\psi = 0$ si bien que finalement si l'on prend l'exemple de la matrice raideur dans la base des déformées admissibles, elle pourra se mettre sous la forme :

$$K_{i(24 \times 24)} = \begin{vmatrix} K_{i(12 \times 12)} & 0 \\ 0 & K_{i(12 \times 12)} \end{vmatrix} \begin{matrix} (P_1) \\ (P_2) \\ (P_3) \\ (P_4) \\ (P_5) \\ (P_6) \end{matrix}$$

où les deux matrices $K_{i(12 \times 12)}$ sont identiques à la matrice que nous avons donnée précédemment. Le raisonnement est également valable pour la matrice masse et nous obtiendrions finalement deux fois les mêmes fréquences propres.

Dans le cas où $m = 0$, on aurait pour la matrice raideur :

$$K_{i(24, 24)} = \begin{vmatrix} 8 \times 8 & & & & & \\ & 4 \times 4 & & & & \\ & & 8 \times 8 & & & \\ & & & 4 \times 4 & & \\ 0 & & & & 4 \times 4 & \\ & & & & & 4 \times 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (P_1) \\ (P_2) \\ (P_3) \\ (P_4) \\ (P_5) \\ (P_6) \end{matrix}$$

Ce qui explique également que l'on retrouve les vibrations de torsion pure lorsque m est nul (matrices 4×4).

III.6 - CALCUL DES VALEURS PROPRES ET DES VECTEURS PROPRES

III.6.1. - Emboitage des matrices élémentaires

Il se fait d'une façon analogue à celle qu'on utilise pour traiter le cas des vibrations de poutres continues. L'introduction des conditions aux limites particulières se fait également d'une manière classique (suppression de lignes et colonnes).

III.6.2. - Utilisation de variables adimensionnelles

Si on note respectivement μ et γ les matrices finales obtenues après emboitage des matrices μ_1 et γ_1 , le problème est ramené au problème aux valeurs propres suivant :

$$(\gamma - \omega^2 \mu) Y = 0$$

Nous poserons :

$$\mu = (2) \pi R^2 h \rho M$$

$$\gamma = (2) \pi \frac{Eh}{1 - \nu^2} K$$

Le (2) entre parenthèses apparaît dans le cas de l'élément simplifié, et non dans le cas de l'élément que nous appellerons complet par opposition (élément où m n'est pas nul).

Nous ramènerons le problème à :

$$(K - \Lambda^2 M) Y = 0$$

les pulsations propres adimensionnelles Λ étant telles que :

$$\Lambda = \omega R \sqrt{\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E}}$$

III.6.3. - Méthode de calcul

III.6.3.1. - Sous-programmes

Nous avons conçu deux sous-programmes de calcul des matrices élémentaires (un sous-programme utilisant l'élément complet, un autre

particulier à l'élément simplifié) qui puissent englober tous les cas possibles. Leur conception est la même, si bien que nous nous bornerons à décrire celui utilisant l'élément complet.

Ce sous-programme SPHER donne dans l'ordre $1 \rightarrow n$ les matrices élémentaires adimensionnelles composant les matrices finales K et M suivant :

- le nombre d'éléments désirés
- la valeur du nombre m
- le mode de découpage souhaité
- l'épaisseur de chaque élément.

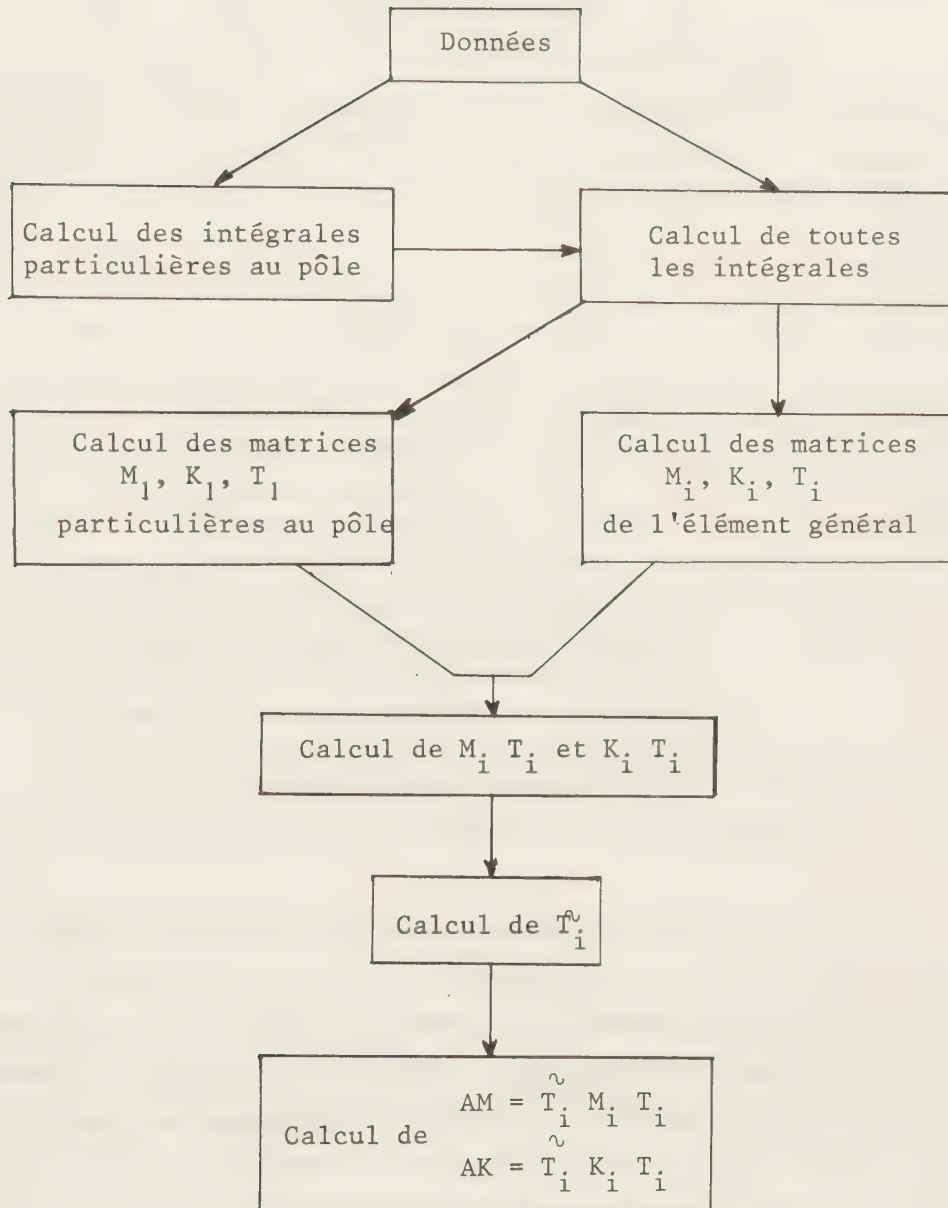
On a SPHER (N, M, DEC, EPS, AM, AK)

N $\rightarrow$ nombre d'éléments n
M $\rightarrow$ m
DEC $\rightarrow$ vecteur de dimension n de composantes $\theta_2, \dots, \theta_{n+1}$
(la valeur $\theta_1 = 0$ est exclue)
EPS $\rightarrow$ vecteur de dimension n donnant les caractéristiques d'épaisseur :

$$EPS(i) = \frac{h^2(i)}{12 R^2}$$

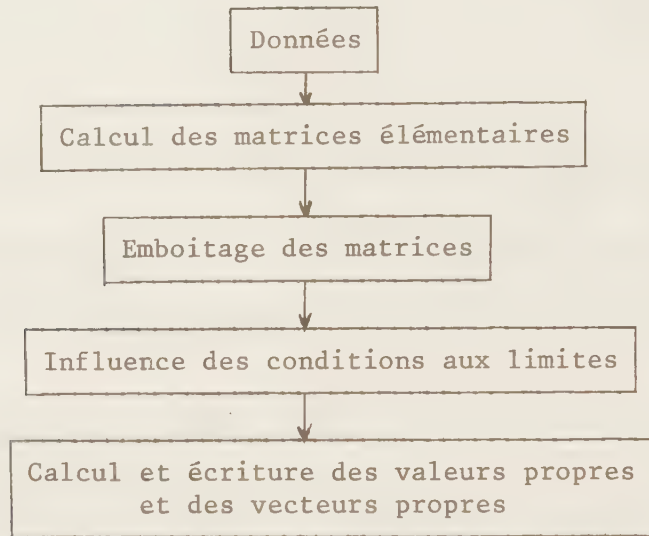
AM
AK $\rightarrow$ cubes donnant les matrices dans l'ordre $1 \rightarrow n$
|AM (12, 12, n) et AK (12, 12, n)|

Nous donnons page suivante un schéma simplifié de l'organigramme de ce sous-programme et en annexe un listing complet.



III.6.3.2 - Programme principal

Le schéma de l'organigramme du programme principal est le suivant :



Les sous-programmes utilisés pour tous ces calculs sont constitués d'un sous-programme de calcul des intégrales par intégration numérique (sous-programme IBM : DQG 8) et d'un sous-programme de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres (sous-programme IBM = DNROOT), tous les calculs étant effectués en double précision.

Nous donnons à titre d'exemple, suivant le nombre d'éléments utilisés, la taille en mémoire et le temps de calcul correspondant nécessaires, sur l'ordinateur IBM 370 - 135 du Centre de Calcul Universitaire de Nantes que nous avons utilisé.

a) Cas de l'élément complet :

NOMBRE D'ELEMENTS	NOMBRE DE (1) DEGRES DE LIBERTE	TAILLE EN (2) MEMOIRE	TEMPS DE (3) CALCUL
5	32	150 k	1 mn 44 s
7	44	207 k	6 mn 12 s
10	62	314 k	17 mn 30 s

(1) Pour une calotte libre dans l'espace

(2) Avec 1 k = 1024 octets

(3) Nous indiquons ici le temps de pur calcul (n'est pas compté le temps de compilation et de lecture des sous-programmes).

b) Cas de l'élément simplifié :

NOMBRE D'ELEMENTS	NOMBRE DE (4) DEGRES DE LIBERTE	TAILLE EN MEMOIRE	TEMPS DE CALCUL
10	29	100 k	1 mn 49 s
20	59	230 k	11 mn 5 s

(4) Pour la sphère libre dans l'espace

Nous constatons donc que pour un même nombre d'éléments (10 par exemple), quand on compare les tailles en mémoire, et les temps de calcul par l'élément complet et par l'élément simplifié (dans le cas $m = 0$), la taille en mémoire est divisée par 3, et le temps de calcul est divisé par 9 pour l'élément simplifié.

CHAPITRE IV

Etude de quelques cas

Afin de vérifier nos programmes et de tester l'élément que nous avons bâti, nous avons comparé nos résultats aux résultats analytiques obtenus par divers auteurs dans certains cas particuliers. Nous avons distingué, comme dans l'exposé des méthodes analytiques, le cas de la membrane, et le cas de la coque sphérique de faible épaisseur. En effet, pour traiter la membrane, il suffit de faire calculer les matrices élémentaires par nos sous-programmes dans le cas où le coefficient d'épaisseur (EPS) est nul. On vérifie alors aisément que cela fait disparaître respectivement les termes dus à l'énergie cinétique de rotation, et les termes dus à l'influence des moments de flexion dans l'énergie potentielle.

IV.1 - VIBRATIONS AXISYMETRIQUES PURES ($m = 0$)

Nous avons dans ce cas utilisé l'élément simplifié.

IV.1.1. - Cas de la sphère libre dans l'espace

Nous avons utilisé pour le pôle sud des déformées dynamiques particulières (cf. § III.5.2.3. et annexe), et découpé la sphère une première fois en 10 éléments, une seconde fois en 20 éléments d'angles au centre égaux.

IV.1.1.1. - Membrane

Nous pouvons comparer les pulsations propres adimensionnelles obtenues par la méthode des éléments finis à celles référencées (R_1) dans notre exposé, en remarquant que l'on dit avoir

$$\Lambda = \sqrt{\lambda_n^{\pm}}$$

Une constatation s'impose : nous obtenons une confusion de fréquences propres.

Lorsque nous discrétisons la sphère en n éléments, nous obtenons $n + 1$ valeurs propres correspondant au mode purement radial. Ceci s'explique parfaitement; si nous recherchons pour la membrane ce mode radial, les énergies deviennent :

$$2E_{c,i} = 2 \pi R^2 h \rho \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \dot{u}_i^2 \sin \theta d \theta$$

$$2E_{p,i} = 2 \pi R^2 \frac{Eh}{1-\nu} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} 2 (1 + \nu) u_i^2 \sin \theta d \theta$$

le déplacement u_i étant uniquement une fonction du temps. Les matrices masse et raideur adimensionnelles sont donc diagonales, la matrice raideur étant égale à $2 (1 + \nu)$ fois la matrice masse.

Si on discrétise en n éléments ces matrices ont pour dimension $n + 1$. Donc nous obtenons $n + 1$ fois la pulsation propre adimensionnelle

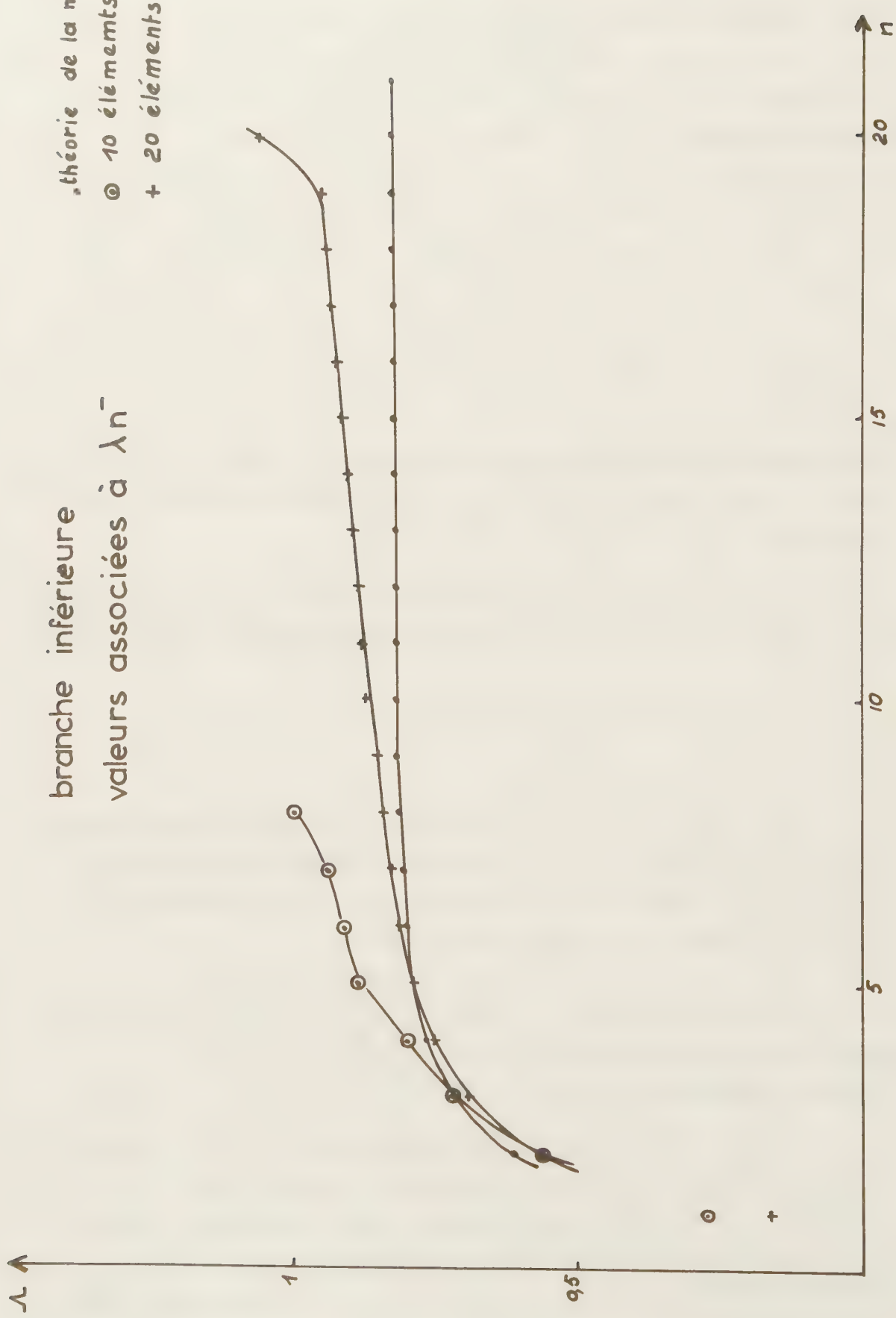
$$\Lambda = \sqrt{2(1 + \nu)}$$

qui est exacte (cf λ_0 au § II.1.1.).

Si l'explication de cette confusion est simple, nous n'avons pas trouvé de solution simple au problème de l'élimination de ces fréquences, qui permettrait de réduire de n le nombre de degrés de liberté du système. Le problème reste à résoudre.

Nous donnons pour les autres modes des courbes comparatives entre la méthode analytique exacte et les résultats obtenus avec l'élément simplifié, ainsi que l'erreur obtenue.

On pourra constater qu'en discrétisant en 10 et 20 éléments, on obtient respectivement 5 et 15 pulsations propres à moins de 5% d'erreur. Si les résultats sont médiocres avec 10 éléments, ils sont très satisfaisants lorsqu'on prend 20 éléments.



branche inférieure
valeurs associées à λn^-

théorie de la membrane
○ 10 éléments
+ 20 éléments

fig: 9

branche supérieure
valeurs associées à λn^+

• théorie de la membrane

⊙ 10 éléments

+ 20 éléments

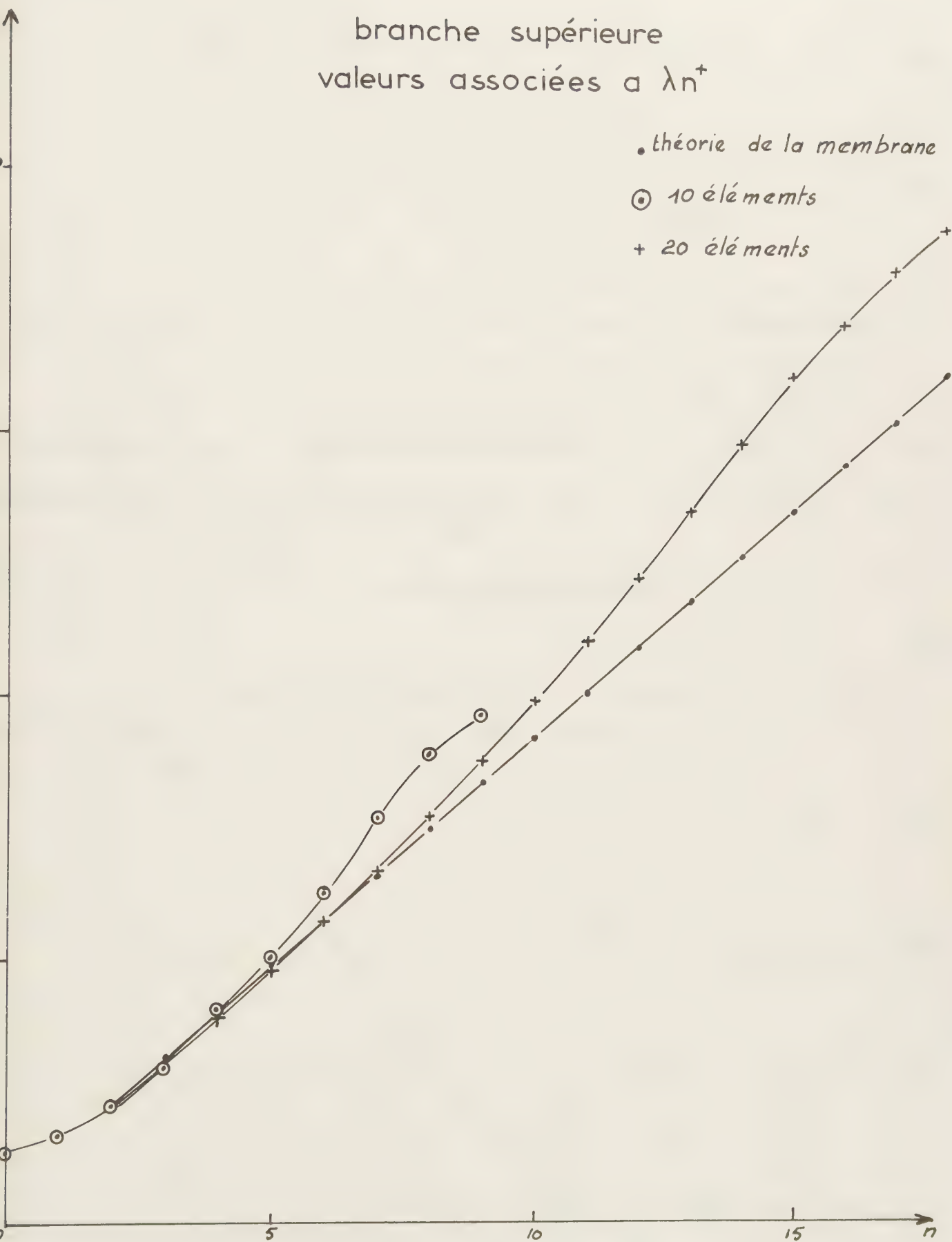
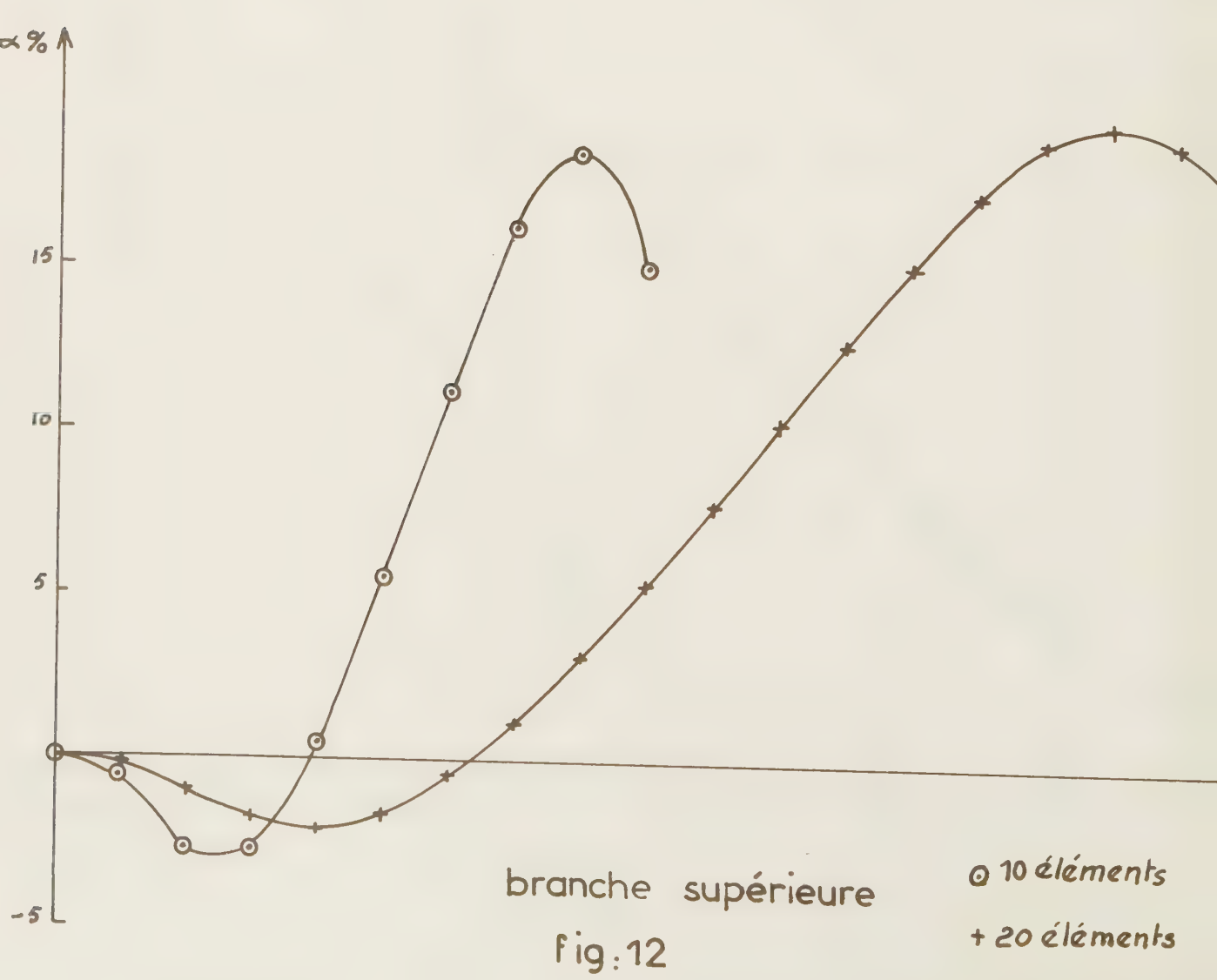
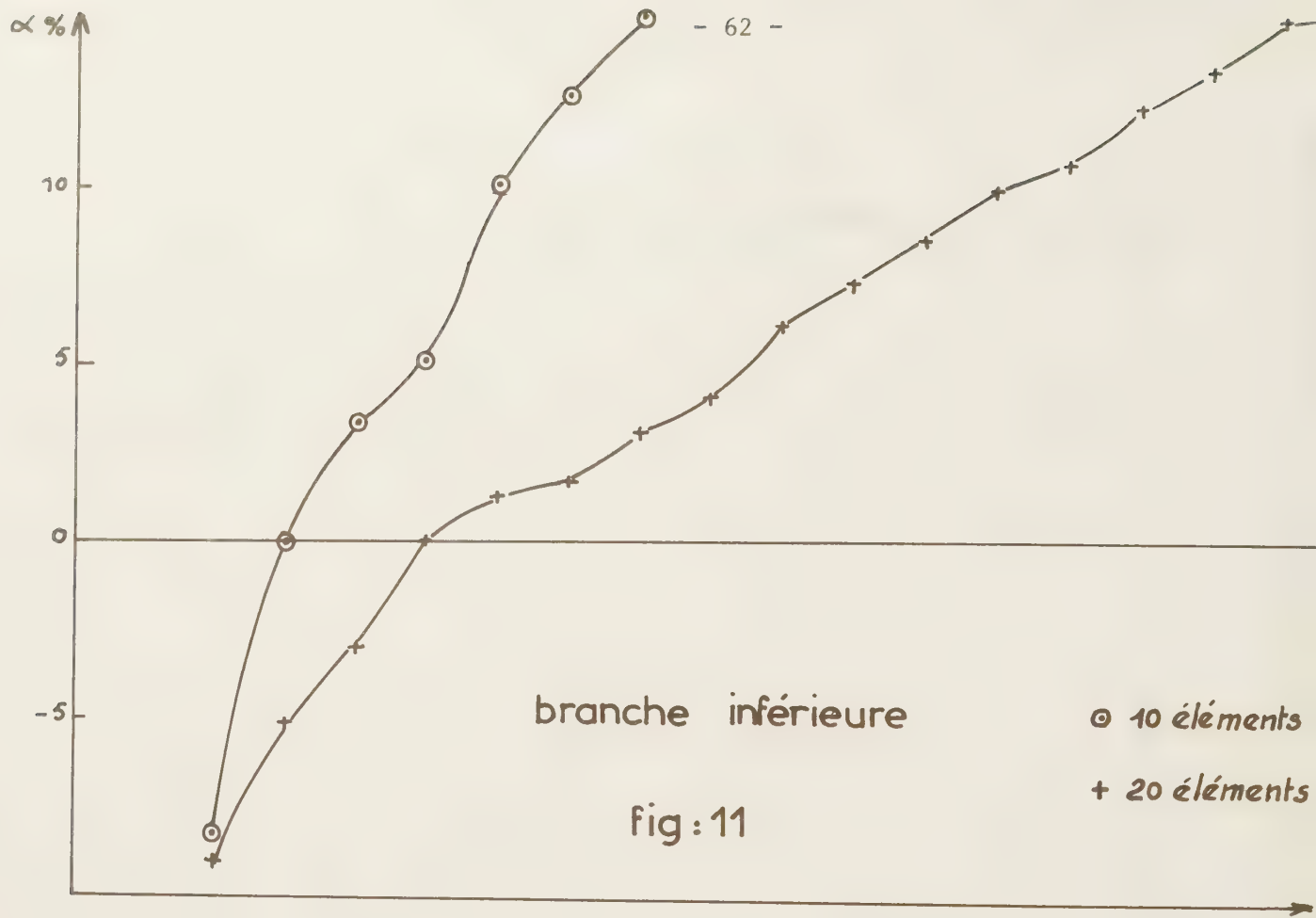


fig : 10



IV.1.1.2. - Coque sphérique de faible épaisseur

Nous trouvons que les fréquences propres les plus basses prennent des valeurs légèrement supérieures à celles correspondantes de la membrane, alors que les fréquences de la "branche supérieure" ne sont pas affectées, ce qui est en accord avec la théorie de NAGHDI - KALNINS |10| .

Une remarque importante s'impose quant au mode purement radial : la forme des énergies est telle que si l'on recherche uniquement ce mode, les matrices masse et raideur ne sont plus tout à fait proportionnelles, et la confusion de fréquences propres qu'on obtenait dans le cas de la membrane se transforme dans ce cas en un étalement dont l'amplitude varie dans le même sens que le coefficient d'épaisseur. Il apparaît donc dans tous les cas n fréquences propres parasites qu'on ne peut éliminer qu'après examen des vecteurs propres.

IV.1.2. - Cas des calottes sphériques

Le seul exemple qu'on en ait, à notre connaissance, est celui traité par KALNINS |19|, par NAVARATNA |22| par WEBSTER |23|. C'est le cas d'une calotte de 60° de demi-angle au sommet et telle que l'on ait $\frac{h}{R} = 0,05$ et $\nu = 0,3$.

$$\Omega = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

KALNINS	NAVARATNA	WEBSTER	ELEMENT SIMPLIFIE
Calotte libre			
0,931	0,932	0,931	0,883
1,088	1,094	1,089	1,056
1,533	1,544	1,535	1,522
2,348	2,363	2,360	2,369
2,544	2,548	2,551	2,534
3,497	3,519	4,023	3,554
4,951	4,980	5,548	5,014
5,230	5,543	6,224	5,366
6,693	6,734	6,862	6,766

On peut constater que nos résultats donnent des valeurs inférieures à celles obtenues par les autres auteurs pour les fréquences les plus basses. Nos résultats sont moins bons que ceux de Navaratna, mais nous utilisons moitié moins de degré de liberté que lui, sont moins bons pour les premiers modes que ceux de Webster, mais meilleurs pour les suivants.

IV.2 - VIBRATIONS NON SYMETRIQUES ($m \neq 0$)

Le seul exemple d'application que l'on ait est celui traité par DEB NATH [24] et KALNINS [19]. C'est le cas d'une calotte de 30° de demi-angle au sommet et telle que $\frac{h}{R} = 0,05$ et $\nu = 0,3$. Nous avons comparé nos résultats dans le cas où $m = 2$.

$$\Omega = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

KALNINS	DEB NATH		ELEMENT COMPLET	
	Calotte encastrée			
degrés de liberté		32		28
2,336		2,1561		2,267
5,178		4,6658		5,109
6,460		6,2309		6,006
	Calotte libre			
degrés de liberté	36	60	32	46
	0,31159	0,31094	0,335	0,3178
	2,1515	2,1423	2,268	2,179
	2,8733	2,8692	2,747	2,800

On constate que dans les deux cas pour les deux premiers modes nos valeurs sont plus élevées, et que dans le cas de la calotte encastrée nos valeurs sont comprises entre celles données par KALNINS et DEB NATH. On peut voir que les divers auteurs que nous avons cités traitent des cas où les pulsations propres adimensionnelles ont des valeurs élevées. Si l'on prend l'exemple d'une calotte en acier de rayon moyen d'un demi-mètre, la fréquence propre en Hertz est donnée par :

$$f = 1611,8 \Omega \quad (\text{Hz})$$

Or dans le cas des vibrations axisymétriques, le fondamental a en général une pulsation adimensionnelle de l'ordre de l'unité. Les fréquences propres correspondantes sont donc très élevées.

Dans le cas des vibrations non symétriques, les divers auteurs se bornent à étudier le cas où $m = 2$, où le fondamental est très bas pour des calottes libres, ou posées au pôle.

Si l'on veut le spectre des fréquences propres dans l'ordre croissant pour de telles calottes, il ne faut pas oublier les fondamentaux des cas où m vaut 3, 4, ..., qui sont plus gênants physiquement que les modes suivants du cas $m = 2$. Il est évident que tous ces modes fondamentaux (où il n'y a pas de noeud suivant un méridien) auront des fréquences beaucoup plus basses que le deuxième mode du cas $m = 2$, ou que le premier mode purement axisymétrique.

Pour justifier nos affirmations, nous donnons à titre d'exemple une partie du spectre des fréquences propres d'une demi-sphère posée au pôle, avec $\frac{h}{R} = 0,01$ et $\nu = 0,3$. La figure 13 donne la distribution de ces fréquences jusqu'à $m = 8$.

Enfin, on peut s'apercevoir que ces fréquences propres les plus basses sont très affectées par une faible variation d'épaisseur, qu'elle soit uniforme ou non, alors que les fréquences des modes où il y a au moins un noeud suivant un parallèle ne le sont pratiquement pas.



FIG:13

CHAPITRE V

Vérification expérimentale

V.1. - DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Les fréquences propres des calottes sphériques devenant rapidement élevées, ainsi que nous venons de le démontrer, à la demi-sphère en métal, nous avons préféré travailler sur une demi-sphère en plexiglas afin de voir l'influence d'une épaisseur non uniforme et de baisser les fréquences propres. Celles-ci sont en effet données par :

$$f = \frac{1}{2 \pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho (1 - \nu^2)}} \Lambda$$

On en déduit qu'en utilisant du plexiglas :

$$E = 3.10^9 \text{ N/m}^2 \quad \rho = 1200 \text{ kg} \quad (\nu = 0,3)$$

à la place de l'acier :

$$E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \rho = 7800 \text{ kg} \quad (\nu = 0,3)$$

on divise les fréquences propres du système par 3,2 (à rayon égal).

La demi-sphère en plexiglas a un rayon moyen de 0,395 m, et une épaisseur lentement variable. Ayant été fabriqué par soufflage à partir d'une plaque, elle a une épaisseur de 2 mm au pôle et 6 mm sur l'équateur. Notons enfin, que bien qu'ayant été réalisée à l'aide d'un moule, sa sphéricité laisse à désirer.

Afin de vérifier notre théorie, nous avons fait deux types de mesures : la demi-sphère libre dans l'espace et la demi-sphère posée au pôle. Le schéma du montage est le suivant dans le cas de la demi-sphère libre :

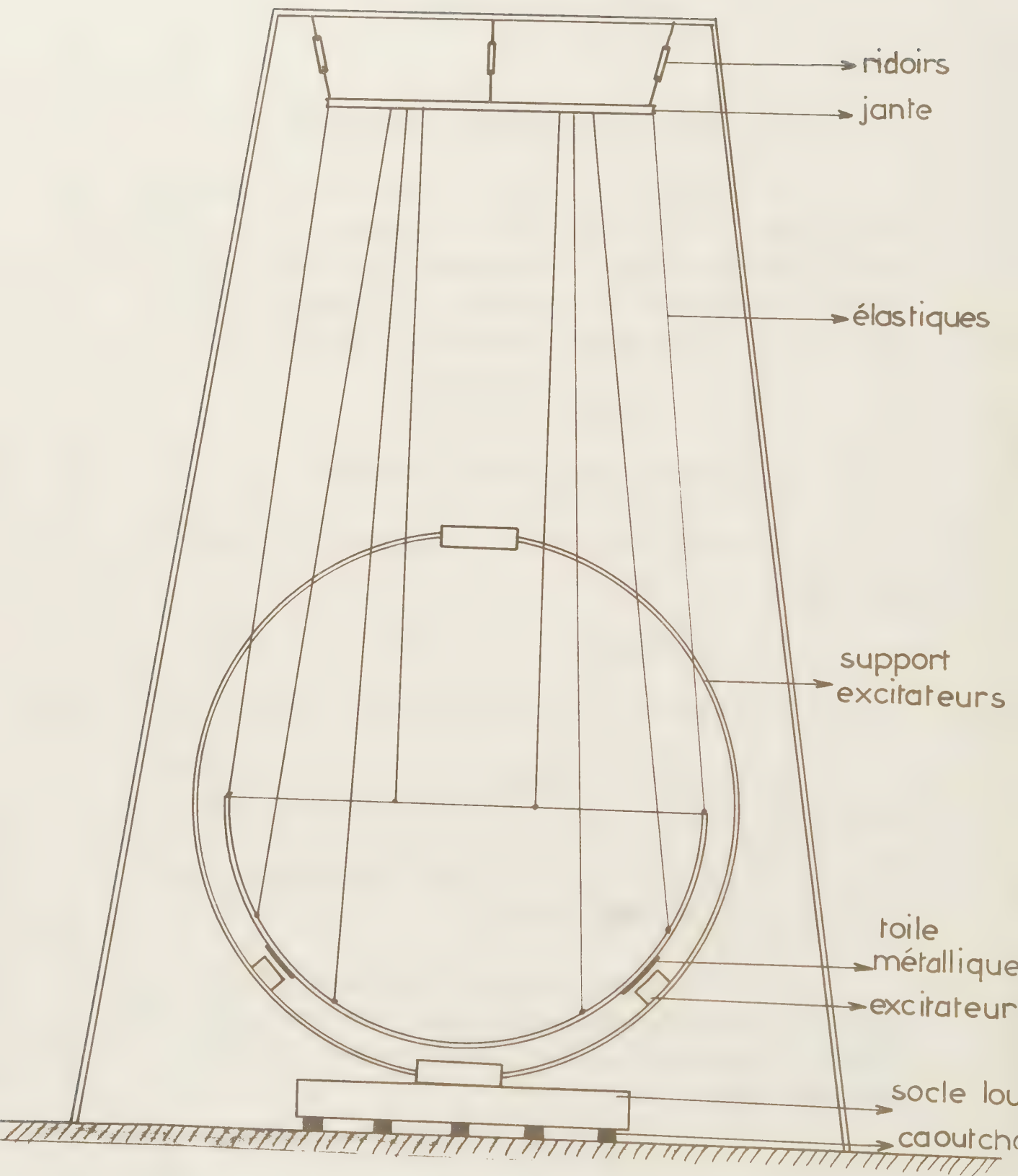
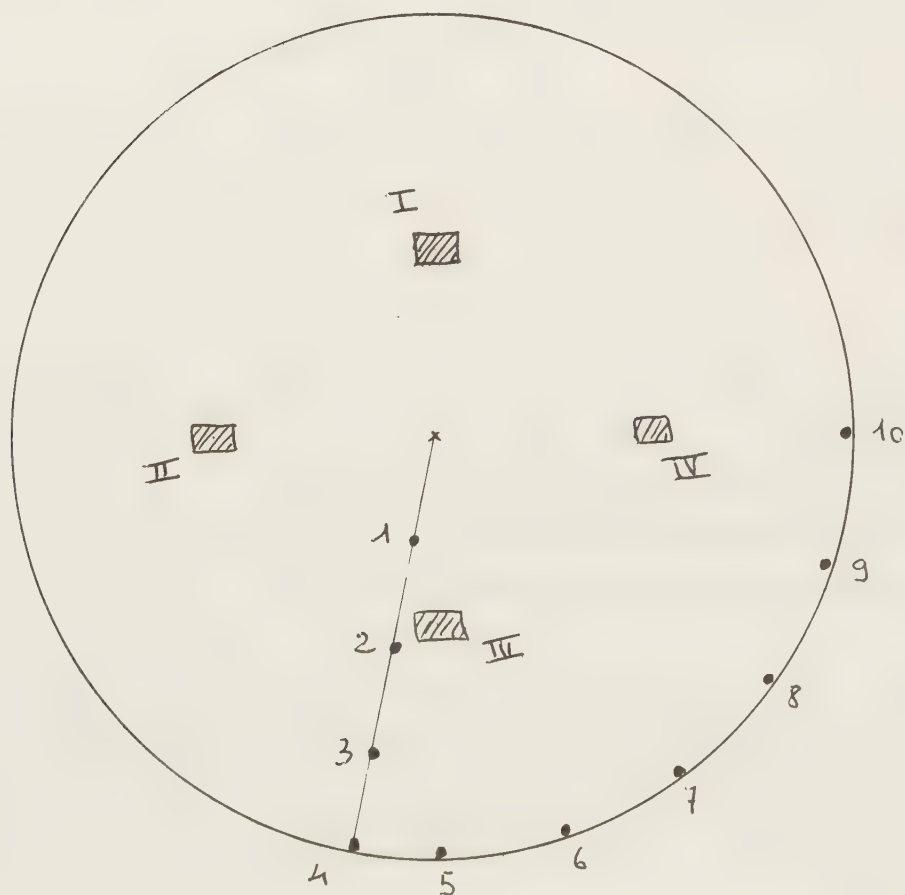


FIG: 14

La demi-sphère est suspendue par 32 élastiques minces, la fréquence propre du système étant de 0,5 Hz. Afin de pouvoir approprier les différents modes sans trop perturber la structure, nous y avons collé quatre morceaux de toile métallique à 90°, l'excitation se faisant par excitateurs magnétiques, pouvant être en phase ou en opposition de phase.

La mesure est faite à l'aide de 10 micro-accéléromètres, pesant chacun 2 grammes, collés de la manière suivante :

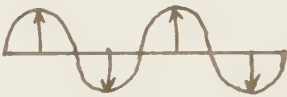


Les accéléromètres 1 à 4 nous donnent la déformée suivant un méridien, les accéléromètres 6 à 10 nous donnant celle suivant un quart de parallèle, le reste étant obtenu par raison de symétrie.

V.2. - RESULTATS EXPERIMENTAUX

V.2.1. - Appropriation

Les modes où $m = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, seront appropriés de la manière suivante :

$m = 2$  (déformée développée d'un parallèle)

D'où les excitateurs I et III en opposition de phase par rapport aux excitateurs II et IV.

$m = 3$ 

qui est préférable à :



car dans ce dernier cas le système est instable : avec deux seuls excitateurs, pour que le mode apparaisse, les forces d'excitation sont trop fortes, et la demi-sphère vient se coller aux excitateurs. Dans le premier cas, même si l'appropriation n'est pas parfaite, le fait d'utiliser les quatre excitateurs a un effet stabilisant.

En raisonnant de la même manière, on montre qu'avec 4 excitateurs, on peut bien approprier les premiers modes quelque soit la valeur de m . Le tableau suivant indique la méthode que nous avons utilisée : (+ ou - indiquant que les excitateurs sont en phase ou en opposition de phase).

m	Excitateurs			
	I	II	III	IV
2	+	-	+	-
3	+	+	-	-
4	+	+	+	+
5	+	+	-	-
6	+	-	+	-
7	+	+	-	-
8	+	+	+	+

V.2.2. - Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

Les résultats théoriques ont été obtenus en prenant respectivement 5, 7 ou 10 éléments suivant les cas, d'angles au centre égaux, dans les deux cas suivants :

- Cas 1 - la demi-sphère est supposée d'épaisseur constante moyenne égale à 4 mm.

- Cas 2 - la demi-sphère est supposée d'épaisseur variable linéairement répartie. Nous remplaçons cette fonction linéaire par une fonction en escalier, la variation d'épaisseur étant également répartie sur chacun des éléments.

Les fréquences propres sont alors données par :

$$f = 667,8 \text{ } \Lambda \text{ Hz}$$

Le tableau comparatif entre résultats théoriques et expérimentaux est alors le suivant :

MODE (*)	FREQUENCES EXPERIMENTALES (Hz)	FREQUENCES THEORIQUES (Hz)			
		CAS I	CAS II		
		7 éléments	5 éléments	7 éléments	10 éléments
(2,0)	9,6	9,4	14,8	11,7	11
(3,0)	31	22,6	32,4	31,8	
(4,0)	60	42,8	61,8	61	
(5,0)	102	68	98,5		
(6,0)	141	97,8	141,5		

(*) 1er indice : m
2e indice : nombre de noeuds sur un méridien

Les nombres de degrés de liberté utilisés sont les suivants :

5 éléments : 32
7 éléments : 44
10 éléments : 62

On peut donc constater que la deuxième modélisation (épaisseur variable) donne des résultats satisfaisants alors que la première s'écarte vite de la solution après le premier mode.

Au point de vue expérimental, les modes suivants du type (7,0), (8,0)... n'ont pu être mesurés car d'amplitudes trop faibles. Il nous faudrait beaucoup plus d'excitateurs, donc coller beaucoup plus de grillage sur la demi-sphère, donc modifier sensiblement la structure.

Les modes avec un parallèle nodal ((2,1), (3,1)...) ne peuvent être obtenus (excitation au noeud). Quant aux suivants, ils ne peuvent être décelés (modes différents à fréquences très voisines). Tout au plus pouvons nous affirmer qu'il existe beaucoup de fréquences propres dans la zone intéressée. Nous donnerons page suivante les résultats théoriques obtenus pour les modes à 1, 2, 3... parallèles nodaux dans le cas de la demi-sphère discrétisée en 5 éléments,

<u>Fréquence</u> (Hz)	<u>Mode</u>
563	(2,1)
573	(0,1)
598	(1,1)
599	(4,1)
612	(3,1)
617	(1,2)
618	(2,2)
619	(5,1)
624	(0,2)
625	(4,2)
636	(5,2)
637	(0,3)
638	(1,3)
.	(6,1)
.	
.	

Enfin, nous avons voulu vérifier que dans ces modes non symétriques le pôle restait fixe comme nous l'avons démontré, ce qui signifie que les fréquences propres de la demi-sphère posée au pôle sont les mêmes. Nous obtenons :

FREQUENCES EXPERIMENTALES (Hz)	
DEMI-SPHERE LIBRE	DEMI-SPHERE POSEE AU POLE
9,6	9,6
31	31
60	61
102	101
141	141

On peut donc vérifier (aux erreurs de mesure près) que le pôle ne peut avoir aucun déplacement dans les modes non symétriques.

Nous donnons ci-dessous un tableau où figurent quelques types de modes :

Modes (m, p)

p m					
	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)
	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)
	(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)

CONCLUSION

Nous avons appliqué la méthode des éléments finis en coordonnées globales au cas particulier des sphères et des calottes sphériques et construit un élément dont nous donnons toutes les caractéristiques.

Ceci nous a permis tout d'abord d'étudier le cas particulier du point singulier qu'est le pôle et de démontrer que ce dernier reste fixe dans les vibrations non symétriques ($m \neq 0$) et a un déplacement purement radial dans les vibrations axisymétriques ($m = 0$). En étudiant un autre élément ("simplifié") qui permet de traiter les vibrations axisymétriques, nous avons mis en évidence et expliqué la présence d'une confusion de fréquences propres dans le cas de la membrane qui se transformait en un "étalement" de fréquences propres dont certaines étaient parasites. Nous n'avons pourtant pas trouvé de solution simple (à l'exception du recours aux vecteurs propres) d'élimination systématique des fréquences parasites. Ce problème semblerait en liaison avec le problème de la condensation et pourrait faire l'objet d'une étude future.

Nous avons ensuite étudié le cas des vibrations non symétriques et montré que les fréquences les plus basses de certaines calottes n'étaient pas, à notre connaissance, données par les autres auteurs qui se sont penchés sur ce problème, et qu'une très légère variation d'épaisseur avait une influence très importante sur les valeurs de ces fréquences propres.

Nous avons terminé par une vérification expérimentale en choisissant une demi-sphère d'épaisseur légèrement variable, et constaté un bon accord entre nos résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Nous avons également vérifié expérimentalement que le pôle restait fixe dans les modes non symétriques.

ANNEXE N° 1

Justification de la méthode de calcul des intégrales

1°) Les intégrales I, J, N.

Ce sont les plus simples : les intégrales I, J sont calculées par récurrence, l'intégrale N l'est directement.

$$1.1.- \quad I_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \sin \theta \, d\theta$$

$$\text{on a} \quad I_{0,i} = - \cos \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$I_{1,i} = - \theta \cos \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + \sin \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$\text{puis} \quad I_{n,i} = - \theta^n \cos \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + n \theta^{n-1} \sin \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} - n(n-1) I_{n-2,i}$$

$$1.2.- \quad J_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \cos \theta \, d\theta$$

$$\text{on a} \quad J_{0,i} = \sin \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$\text{puis} \quad J_{n,i} = \theta^n \sin \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} - n I_{n-1,i}$$

$$1.3.- N_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n d\theta = \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

2°) Les intégrales K et M

$$K_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\theta^n}{\sin \theta} d\theta$$

$$M_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \cotg \theta d\theta$$

2.1.- Cas où $n = 0$

On a :

$$K_{0,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \text{Log} \left| \text{tg} \frac{\theta}{2} \right| \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$M_{0,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \cotg \theta d\theta = \text{Log} |\sin \theta| \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

Ces intégrales sont infinies au pôle. Elles sont en fait éliminées pour cette calotte.

2.2. - Cas où $n \neq 0$

Les intégrales ne sont plus infinies au pôle, et interviennent dans les expressions. On peut les calculer, soit par formulation analytique soit par intégration numérique, cette dernière méthode étant exclue dans le cas du pôle ($\sin \theta = 0$).

La formulation analytique est donnée par GROBNER et HOFREITER [25] :

$$K_{n,i} = \frac{\theta^n}{n} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{2 (2^{2v} - 1)}{(n + 2v) (2v)!} B_{2v} \theta^{n+2v} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$M_{n,i} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{2^{2v}}{(n+2v)(2v)!} B_{2v} \theta^{n+2v} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right.$$

où B_{2v} est la constante de Bernoulli :

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & B_1 &= -\frac{1}{2} & B_2 &= \frac{1}{6} & B_4 &= -\frac{1}{30} \\ B_6 &= \frac{1}{42} & B_8 &= -\frac{1}{30} & B_{10} &= \frac{5}{66} & B_{12} &= -\frac{691}{2730} \dots \\ B_3 &= B_5 = B_7 = \dots = 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc $K_{n,i}$ et $M_{n,i}$ sous forme de séries infinies. Nous calculerons donc $K_{n,i}$ et $M_{n,i}$ à l'aide de ces séries pour la calotte comportant le pôle, et par intégration numérique pour les autres éléments, afin de pouvoir tronquer les séries dont la convergence est lente.

Nous prendrons :

$$\begin{aligned} K_{n,i} &= \frac{\theta^n}{n} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. + \frac{6}{n+2} \theta^{n+2} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. + \frac{7}{360(n+4)} \theta^{n+4} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. \\ &\quad + \frac{31}{15120(n+6)} \theta^{n+6} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. + \frac{127}{604800(n+8)} \theta^{n+8} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. \\ M_{n,i} &= \frac{\theta^n}{n} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. - \frac{1}{3(n+2)} \theta^{n+2} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. - \frac{1}{45(n+4)} \theta^{n+4} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. \\ &\quad - \frac{2}{945(n+6)} \theta^{n+6} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. - \frac{1}{4725(n+8)} \theta^{n+8} \left| \begin{matrix} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{matrix} \right. \end{aligned}$$

pour la calotte comportant le pôle.

Afin de justifier l'utilisation de l'intégration numérique, nous donnons à titre d'exemple les valeurs comparatives de deux intégrales particulières ($K_{1,i}$ et $K_{2,i}$) pour des valeurs de θ_i allant de $\frac{\pi}{10}$ à $\frac{9\pi}{10}$. On peut alors constater que pour θ petit les résultats obtenus par la série tronquée sont très bons, mais qu'il n'en est pas de même pour θ grand :

Exemple

$K_{1,i}$

Série tronquée	Intégration numérique
0.3265975D 00	0.3265975D 00
0.3495943D 00	0.3495954D 00
0.3886130D 00	0.3886396D 00
0.4508768D 00	0.4512031D 00
0.5497661D 00	0.5524028D 00
0.7095458D 00	0.7260492D 00
0.9731687D 00	0.1063808D 01
0.1414414D 01	0.1930790D 01

$K_{2,i}$

Série tronquée	Intégration numérique
0.1543345D 00	0.1543346D 00
0.2753578D 00	0.2753588D 00
0.4285817D 00	0.4286127D 00
0.6394366D 00	0.6399161D 00
0.9531610D 00	0.9578445D 00
0.1454193D 01	0.1488617D 01
0.2301749D 01	0.2519125D 01
0.3791727D 01	0.5194053D 01

3°) Les intégrales O, P et Q.

$$O_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\theta^n}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$P_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\theta^n}{\sin^3 \theta} d\theta$$

$$Q_{n,i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \theta^n \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

3.1.- Formulation :

Pour $O_{n,i}$: $O_{0,i} = - \cotg \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$

$$O_{1,i} = - \theta \cotg \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + \text{Log} |\sin \theta| \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

si $n > 1$:

$$O_{n,i} = - \theta^n \cotg \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + \frac{n}{n-1} \theta^{n-1} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$+ n \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{2^{2v}}{(n+2v-1)(2v)!} B_{2v} \theta^{n+2v-1} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

Pour $P_{n,i}$: $\forall n$ on a :

$$P_{n,i} = \frac{-n \theta^{n-1} \sin \theta - \theta^n \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + \frac{n(n-1)}{2} K_{n-2,i} + \frac{1}{2} K_{n,i}$$

Pour $Q_{n,i}$: $\forall n$ on a :

$$Q_{n,i} = - \frac{\theta^n}{\sin \theta} \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} + n K_{n-1,i}$$

3.2. - Pour l'élément ne comportant pas le pôle.

Les intégrales précédentes seront calculées à l'aide des formules indiquées, à l'exception des intégrales $O_{n,i}$ (si $n > 1$), pour lesquelles nous utiliserons l'intégration numérique pour les mêmes raisons que celles que nous avons explicitées pour les intégrales K et M.

3.3. - Cas particulier du pôle.

En écrivant que le pôle n'a aucun déplacement, nous n'avons à faire intervenir les intégrales précédentes qu'à partir de $n = 3$. Nous utiliserons des développements limités, et une série tronquée pour l'intégrale $O_{n,i}$. En prenant $\cos \theta \neq 1$ et $\sin \theta \sim \theta$, on obtient :

$$O_{n,i} = \frac{\theta^{n-1}}{n-1} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| + n \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{2^{2v}}{(n+2v-1)(2v)!} \theta^{n+2v-1} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right|$$

Nous prendrons alors :

$$O_{n,i} = \frac{\theta^{n-1}}{n-1} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| - \frac{n}{3(n+1)} \theta^{n+1} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| - \frac{n}{45(n+3)} \theta^{n+3} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right|$$

$$- \frac{2n}{945(n+5)} \theta^{n+5} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| - \frac{n}{4725(n+7)} \theta^{n+7} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right|$$

Et :

$$P_{n,i} = - \frac{n+1}{2} \theta^{n-2} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| + \frac{n(n-1)}{2} K_{n-2,i} + \frac{1}{2} K_{n,i}$$

$$Q_{n,i} = - \theta^{n-1} \left| \begin{array}{c} \theta_{i+1} \\ \theta_i \end{array} \right| + n K_{n-1,i}$$

Matrice M_i^* :

$$M_i^* = \begin{array}{ccccccc} \textcircled{m^2 K_0} & & & & & & (1) \\ m^2 K_1 & I_0 + m^2 K_1 & & & & & (2) \\ m^2 K_2 & 2I_1 + m^2 K_3 & 4I_2 + m^2 K_4 & & & & 0 \\ m^2 K_3 & 3I_2 + m^2 K_4 & 6I_3 + m^2 K_5 & 9I_4 + m^2 K_6 & & & \\ & & & & & & (5) \\ & & & & & & (9) \end{array}$$

symétrique

0

(1) (2) (5) (9)

II. - Matrice raideur

(1)

$$2(1+v)I_0$$

(2)

$$2(1+v)I_1$$

$$2(1+v)I_2$$

$$2(1+v)I_3$$

(5)

$$(1+v)I_0$$

$$(1+v)I_1$$

$$(1+v)I_2$$

$$(1+v)I_3$$

$$(1+v)I_4$$

(3)

$$(1+v)I_5$$

$$(1+v)I_6$$

$$(1+v)I_7$$

$$(1+v)I_8$$

(1)

(2)

(5)

(9)

Symétrique

(1)	$m^4 \textcircled{P_0} + 2m^2(1-\nu) \textcircled{S_0}$			
(2)	$m^4 \textcircled{P_1} + m^2(2\nu-3) \textcircled{Q_0}$ $+ 2m^2(1-\nu) \textcircled{S_1}$	$\textcircled{L_0} + 2m^2(1-\nu) \textcircled{K_0}$ $+ m^4 \textcircled{P_0} + 2m^2(2\nu-3) \textcircled{Q_1}$ $+ 2m^2(1-\nu) \textcircled{S_2}$	Symétrique	
	$-2m^2\nu \textcircled{K_0} + m^4 \textcircled{P_2}$ $+ 2m^2(2\nu-3) \textcircled{Q_1}$ $+ 2m^2(1-\nu) \textcircled{S_2}$	$2\nu J_0 + 2L_1$ $+ 2m^2(2-3\nu) K_2$ $+ m^4 P_3 + 3m^2(2\nu-3) Q_2$ $+ 2m^2(1-\nu) S_3$	$4I_0 + 8\nu J_2 + 4L_2$ $+ 4m^2(2-3\nu) K_2$ $+ m^4 P_4 + 4m^2(2\nu-3) Q_3$ $+ 2m^2(1-\nu) S_4$	
	$-6m^2\nu K_1 + m^4 P_3$ $+ 3m^2(2\nu-3) Q_2$ $+ 2m^2(1-\nu) S_3$	$6\nu J_1 + 3L_2$ $+ 6m^2(1-\nu) K_2$ $+ m^4 P_4 + 4m^2(2\nu-3) Q_3$ $+ 2m^2(1-\nu) S_4$	$12I_0 + 18\nu J_2 + 6L_3$ $+ 4m^2(3-5\nu) K_3$ $+ m^4 P_5 + 5m^2(2\nu-3) Q_4$ $+ 2m^2(1-\nu) S_5$	$36I_2 + 36\nu J_3 + 9L_4$ $+ 6m^2(3-5\nu) K_4$ $+ m^4 P_6 + 6m^2(2\nu-3) Q_5$ $+ 2m^2(1-\nu) S_6$
(5)	$m^2(2-\nu) \textcircled{Q_0}$	$-\textcircled{L_0} - m^2(1-\nu) \textcircled{K_0}$ $+ m^2(2-\nu) \textcircled{Q_1}$	$-2\nu J_0 - 2L_1$ $- 2m^2(1-\nu) K_1$ $+ m^2(2-\nu) Q_2$	$-6\nu J_1 - 3L_2$ $- 3m^2(1-\nu) K_2$ $+ m^2(2-\nu) Q_3$
$\bar{K}_i^*$	$m^2\nu \textcircled{K_0}$ $+ m^2(2-\nu) \textcircled{Q_1}$	$-\nu J_0 - L_1$ $+ m^2(2\nu-1) K_1$ $+ m^2(2-\nu) Q_2$	$-2I_0 - 4\nu J_2 - 2L_2$ $+ m^2(3\nu-2) K_2$ $+ m^2(2-\nu) Q_3$	$-6I_1 - 9\nu J_2 - 3L_3$ $+ m^2(4\nu-3) K_3$ $+ m^2(2-\nu) Q_4$
	$2m^2\nu K_1$ $+ m^2(2-\nu) Q_2$	$-2\nu J_1 - L_2$ $+ m^2(3\nu-1) K_2$ $+ m^2(2-\nu) Q_3$	$-4I_1 - 6\nu J_2 - 2L_3$ $+ 2m^2(2\nu-1) K_3$ $+ m^2(2-\nu) Q_4$	$-12I_2 - 12\nu J_3 - 3L_4$ $+ m^2(5\nu-3) K_4$ $+ m^2(2-\nu) Q_5$
	$3m^2\nu K_2$ $+ m^2(2-\nu) Q_3$	$-3\nu J_2 - L_3$ $+ m^2(4\nu-1) K_3$ $+ m^2(2-\nu) Q_4$	$-6I_2 - 8\nu J_3 - 2L_4$ $+ m^2(5\nu-2) K_4$ $+ m^2(2-\nu) Q_5$	$-18I_3 - 15\nu J_4 - 3L_5$ $+ m^2(6\nu-3) K_5$ $+ m^2(2-\nu) Q_6$
(9)	$m^3 \textcircled{Q_0}$ $+ m(1-\nu) \textcircled{R_0}$	$-m(2-\nu) \textcircled{\Pi_0}$ $+ m^3 \textcircled{O_1}$ $+ m(1-\nu) \textcircled{R_1}$	$-2m\nu N_0$ $- 2m(2-\nu) \Pi_1$ $+ m^3 O_2 + m(1-\nu) R_2$	$-6m\nu N_1$ $- 3m(2-\nu) \Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-\nu) R_3$
	$-m(1-\nu) \textcircled{\Pi_0}$ $+ m^3 \textcircled{O_1}$ $+ m(1-\nu) \textcircled{R_1}$	$m(1-\nu) N_0$ $- m(3-2\nu) \Pi_1$ $+ m^3 O_2 + m(1-\nu) R_2$	$2m(1-\nu) N_1$ $- m(5-3\nu) \Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-\nu) R_3$	$3m(1-\nu) N_2$ $- m(7-4\nu) \Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-\nu) R_4$
	$-2m(1-\nu) \Pi_1$ $+ m^3 O_2$ $+ m(1-\nu) R_2$	$2m(1-\nu) N_1$ $- m(4-3\nu) \Pi_2$ $+ m^3 O_3 + m(1-\nu) R_3$	$2m(2-3\nu) N_2$ $- m(6-4\nu) \Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-\nu) R_4$	$3m(2-4\nu) N_3$ $- m(8-5\nu) \Pi_4$ $+ m^3 O_5 + m(1-\nu) R_5$
	$-3m(1-\nu) \Pi_2$ $+ m^3 O_3$ $+ m(1-\nu) R_3$	$3m(1-\nu) N_2$ $- m(5-4\nu) \Pi_3$ $+ m^3 O_4 + m(1-\nu) R_4$	$2m(3-4\nu) N_3$ $- m(7-5\nu) \Pi_4$ $+ m^3 O_5 + m(1-\nu) R_5$	$3m(3-5\nu) N_4$ $- m(9-6\nu) \Pi_5$ $+ m^3 O_6 + m(1-\nu) R_6$

(1)

(2)

ANNEXE N° 3

Matrices de l'élément simplifié

I. - Matrices de l'élément général

I.1.- Matrices masse et raideur élémentaires

$$M_i = \begin{vmatrix} I_0 & & & & & \\ I_1 & I_2 & & & & \\ I_2 & I_3 & I_4 & \text{symétrique} & & \\ I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & & \\ & & & & I_0 & \\ & 0 & & & I_1 & I_2 \end{vmatrix}$$

$$K_i = \begin{vmatrix} 2(1+\nu)I_0 & & & & & \\ 2(1+\nu)I_1 & 2(1+\nu)I_2 & & & & \\ 2(1+\nu)I_2 & 2(1+\nu)I_3 & 2(1+\nu)I_4 & \text{symétrique} & & \\ 2(1+\nu)I_3 & 2(1+\nu)I_4 & 2(1+\nu)I_5 & 2(1+\nu)I_6 & & \\ (1+\nu)J_0 & (1+\nu)J_1 & (1+\nu)J_2 & (1+\nu)J_3 & L_0 & \\ (1+\nu)(I_0+J_1) & (1+\nu)(I_1+J_2) & (1+\nu)(I_2+J_3) & (1+\nu)(I_3+J_4) & L_1+J_0 & L_2+I_0+2\nu J_1 \end{vmatrix}$$

$$M_i^* = \begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & I_0 & & & & \\ 0 & 2I_1 & 4I_2 & & & \\ 0 & 3I_2 & 6I_3 & 9I_4 & & \\ & & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$K_i^* = \begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & L_0 & & & & \\ 0 & 2L_1 + 2vJ_0 & 4I_0 + 8vJ_1 & & & \\ & & + 4L_2 & & & \\ 0 & 3L_2 + 6vJ_1 & 12I_1 + 18vJ_2 & 36I_2 + 36vJ_3 & & \\ & & + 6L_3 & + 9L_4 & & \\ 0 & -L_0 & -2L_1 - 2vJ_0 & -3L_2 - 6vJ_1 & L_0 & \\ 0 & -L_1 - vJ_0 & -2I_0 - 2L_2 & -6I_1 - 3L_3 & L_1 + vJ_0 & I_2 + L_2 \\ & & -4vJ_1 & -9vJ_2 & & + 2vJ_1 \end{vmatrix}$$

symétrique

I.2. - Matrice de passage

Elle peut se mettre sous la forme :

$$T_i = \frac{1}{(\theta_{i+1} - \theta_i)^4} \quad \begin{vmatrix} t_i \\ (3 \times 6) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} t'_i \\ (3 \times 6) \end{vmatrix}$$

où t'_i s'obtient à partir de t_i en changeant θ_i en θ_{i+1} et réciproquement.

On a :

$$t_i = \begin{vmatrix} \theta_{i+1}^4 - 4\theta_i \theta_{i+1}^3 + 3\theta_i^2 \theta_{i+1}^2 & 0 & -\theta_i \theta_{i+1}^2 (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \\ 6\theta_i \theta_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i) & 0 & \theta_{i+1}^4 - 3\theta_i^2 \theta_{i+1}^2 + 2\theta_{i+1} \theta_i^3 \\ 3(\theta_i^2 - \theta_{i+1}^2) & 0 & -2\theta_{i+1}^3 - \theta_i^3 + 3\theta_i \theta_{i+1}^2 \\ 2(\theta_{i+1} - \theta_i) & 0 & (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \\ 0 & \theta_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i)^3 & 0 \\ 0 & -(\theta_{i+1} - \theta_i)^3 & 0 \end{vmatrix}$$

II - Matrices des calottes comportant le pôle

II.1. - Cas du pôle nord ($\theta = 0$)

Elles s'obtiennent en supprimant les lignes et colonnes 2 et 5 des matrices de l'élément général. On s'aperçoit que cette opération fait disparaître les intégrales du type L_0 qui sont infinies au pôle.

- Matrice de passage -

$$T_1 = \frac{1}{\theta_2^3} \begin{vmatrix} \theta_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ -3\theta_2 & 3\theta_2 & 0 & -\theta_2^2 \\ 2 & -2 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & \theta_2^2 & 0 \end{vmatrix}$$

II.2 - Cas du pôle sud ($\theta = \pi$) (utilisé pour l'étude de la sphère complète)

En posant $\Psi = \pi - \theta$ on obtient des matrices semblables à celles de la calotte comportant le pôle nord, obtenues à partir de celles-ci par permutation de lignes et de colonnes.

L'autre solution consiste à conserver la variable θ et à écrire que v et $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ sont nuls pour $\theta = \pi$. On a donc pour déformées :

$$u_n(\theta, t) = a_{n,1}(t) + a_{n,3}(t) (\theta^2 - 2\pi\theta) + a_{n,4}(t) (\theta^3 - 3\pi^2\theta)$$

$$v_n(\theta, t) = a_{n,6}(t) \cdot (\theta - \pi)$$

Les matrices sont dans ce cas :

$$M_n = \begin{vmatrix} I_0 & & & \\ I_2 - 2\pi I_1 & I_4 - 4\pi I_3 + 4\pi^2 I_2 & & \text{symétrique} \\ I_3 - 3\pi^2 I_1 & I_5 - 2\pi I_4 - 3\pi^2 I_3 + 6\pi^3 I_2 & I_6 - 6\pi^2 I_4 + 9\pi^4 I_2 & \\ 0 & 0 & 0 & I_2 - 2\pi I_1 + \pi^2 I_0 \end{vmatrix}$$

$$M_n^* = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & 4(I_2 - 2\pi I_1 + \pi^2 I_0) & & \text{symétrique} \\ 0 & 3(I_3 - \pi I_2 - \pi^2 I_1 + \pi^3 I_0) & 9(I_4 - 2\pi^2 I_2 + \pi^4 I_0) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$K_n = \begin{array}{|l|l|l|l|} \hline 2(1+\nu)I_0 & & & \\ \hline 2(1+\nu)(I_2 - 2\pi I_1) & 2(1+\nu)(I_4 - 4\pi I_3 + 4\pi^2 I_2) & \text{symétrique} & \\ \hline 2(1+\nu)(I_3 - 3\pi^2 I_1) & 2(1+\nu)(I_5 - 2\pi I_4 - 3\pi^2 I_3 + 6\pi^3 I_2) & 2(1+\nu)(I_6 - 6\pi^2 I_4 + 9\pi^4 I_2) & \\ \hline (1+\nu)(J_1 - \pi J_0 + I_0) & (1+\nu)(J_3 - 3\pi J_2 + 2\pi J_1 + L_2 - 2\pi J_1) & (1+\nu)(J_4 - \pi J_3 - 3\pi^2 J_2 + 3\pi^3 J_1 + I_3 - 3\pi^2 I_1) & \frac{L_2 + I_0}{+2\nu(J_1 - \pi J_0)} \\ \hline \end{array}$$

$$K_n^* = \begin{array}{|l|l|l|l|} \hline 0 & & & \\ \hline 0 & 4I_0 + \frac{4L_2}{+8\nu(J_1 - \pi J_0)} & & \\ \hline 0 & 12I_1 + \nu(18J_2 - 12\pi J_1 - 6\pi^2 J_0) + 6(\frac{2\pi L_2}{-L_3}) & 36I_2 + 36\nu(J_3 - \pi^2 J_1) + 9(4\pi^2 \frac{L_2}{-4\pi \frac{L_3}{+L_4}}) & \\ \hline 0 & -2I_0 - 2\frac{L_2}{-4\nu(J_1 - \pi J_0)} & -6I_1 - 9\nu J_2 + \nu(6\pi J_1 + 3\pi^2 J_0) - 3(2\pi \frac{L_2}{-3L_1}) & \frac{I_0 + L_2}{+2\nu(J_1 - \pi J_0)} \\ \hline \end{array}$$

Toutes les intégrales du type L étant calculées avec comme bornes d'intégration 0 et $\pi - \theta_n$.

La matrice de passage est alors :

$$T_n = \frac{1}{(\theta_n - \pi)^4} \begin{vmatrix} \pi^2(\theta_n - \pi)(3\theta_n - \pi) & 0 & -\pi^2\theta_n(\theta_n - \pi)^2 & -\theta_n^2(\theta_n - \pi)(3\pi - \theta_n) \\ 3(\theta_n^2 - \pi^2) & 0 & 2\pi^3 + \theta_n^3 - 3\pi^2\theta_n & 3(\pi^2 - \theta_n^2) \\ -2(\theta_n - \pi) & 0 & (\theta_n - \pi)^2 & 2(\theta_n - \pi) \\ 0 & (\theta_n - \pi)^3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ANNEXE N° 4

Listings

Nous nous bornerons à donner un listing du sous-programme de calcul des matrices élémentaires. Afin de ne pas alourdir cette annexe, nous ne donnons ni les sous-programmes FUNCTION qui sont au nombre de 17, ni le programme principal d'emboitage et de calcul des valeurs propres.

Afin que ce sous-programme soit utilisable, nous donnons l'ordre des 17 fonctions à construire :

F 1 à F 6 fonctions $\frac{\theta}{\sin \theta}$ à $\frac{\theta^6}{\sin \theta}$

F 7 à F 12 fonctions $\theta \cotg \theta$ à $\theta^6 \cotg \theta$

F 13 à F 17 fonctions $\frac{\theta^2}{\sin^2 \theta}$ à $\frac{\theta^6}{\sin^2 \theta}$

La définition des arguments est donnée page 55. Pour utiliser ce sous-programme, il faut juste veiller à changer la première carte DOUBLE PRECISION qui est ici utilisable pour 7 matrices (remplacer les 7 par n et les 8 par n + 1, si n est le nombre de matrices désiré) et penser que la première matrice est particulière au pôle et pour m ≠ 0.

```

SUBROUTINE SPHER(N,M,DEC,EPS,AM,AK)
  DCUBLE PRECISION S(8),C(8),TETA(8),T(15,8),XI(7,7),XJ(7,7),
  *XK(7,7),XL(7,7),XM(7,7),XN(7,7),XO(7,7),XP(7,7),XQ(7,7),XR(7,7),
  *XS(7,7),P(12,12,7),P1(12,12,7),DK(12,12,7),DM(12,12,7),
  *DM1(12,12,7),DK1(12,12,7),AM(12,12,7),AK(12,12,7),EPS(7),DEC(7)
  DCUBLE PRECISION XNU,XPI,Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6
  DCUBLE PRECISION T1,T2,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,
  *F14,F15,F16,F17,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8,Y9,Y10,Y11,Y12,Y13,Y14,
  *Y15,Y16,Y17
  EXTERNAL F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,F14,F15,F16,
  *F17
  XPI=3.1415926535DC
  XNU=0.3DC
  M2=M**2
  M3=M**3
  M4=M**4
  Z1=1.DO+XNU
  Z2=(1.DO-XNU)/2.DO
  Z3=(3.DO-XNU)/2.DO
  Z4=1.DO-XNU
  Z5=2.DO-XNU
  Z6=2.DO*XNU-3.DO
  DO 1 I=1,N
  DO 100 L=1,12
  DO 100 J=1,12
  P(L,J,I)=0.DO
  P1(L,J,I)=0.DO
  DM(L,J,I)=0.DO
  DK(L,J,I)=0.DO
  DM1(L,J,I)=0.DO
  DK1(L,J,I)=0.DO
  AM(L,J,I)=0.DO
  100 AK(L,J,I)=0.DO

```

CALCUL DES INTEGRALES

```

TETA(1)=0.DO
TETA(I+1)=DEC(I)

```

```

T(1,I)=TETA(I)
T(1,I+1)=TETA(I+1)
S(I)=DSIN(T(1,I))
S(I+1)=DSIN(T(1,I+1))
C(I)=DCOS(T(1,I))
C(I+1)=DCOS(T(1,I+1))
DO 2 L=1,14
  T(L+1,I)=T(L,I)*T(1,I)
2  T(L+1,I+1)=T(L,I+1)*T(1,I+1)
  XI(1,I)=C(I)-C(I+1)
  XI(2,I)=T(1,I)*C(I)-T(1,I+1)*C(I+1)+S(I+1)-S(I)
  XJ(1,I)=S(I+1)-S(I)
  XJ(2,I)=T(1,I+1)*S(I+1)-T(1,I)*S(I)+C(I+1)-C(I)
  DO 4 L=1,5
  *XI(L+2,I)=T(L+1,I)*C(I)-T(L+1,I+1)*C(I+1)+(L+1)*(T(L,I+1)*S(I+1)
  *-T(L,I)*S(I))-L*(L+1)*XI(L,I)
  XJ(L+2,I)=T(L+1,I+1)*S(I+1)-T(L+1,I)*S(I)-(L+1)*XJ(L+1,I)
4  CONTINUE
  DO 6 L=1,7
6  XN(L,I)=(T(L,I+1)-T(L,I))/(1.DO*L)
  IF(I-1)23,22,23
22 DO 3 L=1,6
  *XK(L+1,I)=(T(L,I+1)-T(L,I))/(1.DO*L)+(T(L+2,I+1)-T(L+2,I))/(6.DO*
  *(L+2))+7.DO*(T(L+4,I+1)-T(L+4,I))/(360.DO*(L+4))+31.DO*(T(L+6,I+1)
  *-T(L+6,I))/(15120.DO*(L+6))+127.DO*(T(L+8,I+1)-T(L+8,I))/
  *(60480.DO*(L+8))
  *XM(L+1,I)=(T(L,I+1)-T(L,I))/(1.DO*L)-(T(L+2,I+1)-T(L+2,I))/(3.DO*
  *(L+2))-(T(L+4,I+1)-T(L+4,I))/(45.DO*(L+4))-2.DO*(T(L+6,I+1)-
  *T(L+6,I))/(945.DO*(L+6))-(T(L+8,I+1)-T(L+8,I))/(4725.DO*(L+8))
3  CONTINUE
  DO 42 L=2,7
42 XL(L,I)=XK(L,I)-XI(L,I)
  DO 31 L=3,6
  *XC(L+1,I)=(T(L-1,I+1)-T(L-1,I))/(1.DO*(L-1))-L*(T(L+1,I+1)-T(L+1,
  *I))/(3.DO*(L+1))-L*(T(L+3,I+1)-T(L+3,I))/(45.DO*(L+3))-2.DO*L*
  *(T(L+5,I+1)-T(L+5,I))/(945.DO*(L+5))-L*(T(L+7,I+1)-T(L+7,I))
  */(4725.DO*(L+7))
  *XP(L+1,I)=-(L+1)*(T(L-2,I+1)-T(L-2,I))/2.DO+L*(L-1)*XK(L-1,I)/2.DO

```

```

*+XK(L+1,I)/2.DO
XQ(L+1,I)=-(T(L-1,I+1)-T(L-1,I))+L*XK(L,I)
XR(L+1,I)=XQ(L+1,I)-XN(L+1,I)
XS(L+1,I)=XP(L+1,I)-XK(L+1,I)
31 CONTINUE
GO TO 24
23 T1=TETA(I)
T2=TETA(I+1)
CALL DQG8(T1,T2,F1,Y1)
CALL DQG8(T1,T2,F2,Y2)
CALL DQG8(T1,T2,F3,Y3)
CALL DQG8(T1,T2,F4,Y4)
CALL DQG8(T1,T2,F5,Y5)
CALL DQG8(T1,T2,F6,Y6)
CALL DQG8(T1,T2,F7,Y7)
CALL DQG8(T1,T2,F8,Y8)
CALL DQG8(T1,T2,F9,Y9)
CALL DQG8(T1,T2,F10,Y10)
CALL DQG8(T1,T2,F11,Y11)
CALL DQG8(T1,T2,F12,Y12)
CALL DQG8(T1,T2,F13,Y13)
CALL DQG8(T1,T2,F14,Y14)
CALL DQG8(T1,T2,F15,Y15)
CALL DQG8(T1,T2,F16,Y16)
CALL DQG8(T1,T2,F17,Y17)
XK(1,I)=DLOG(S(I+1)/(1.DO+C(I+1)))-DLOG(S(I)/(1.DO+C(I)))
XK(2,I)=Y1
XK(3,I)=Y2
XK(4,I)=Y3
XK(5,I)=Y4
XK(6,I)=Y5
XK(7,I)=Y6
XM(1,I)=DLOG(S(I+1))-DLOG(S(I))
XM(2,I)=Y7
XM(3,I)=Y8
XM(4,I)=Y9
XM(5,I)=Y10
XM(6,I)=Y11

```

```

XM(7,I)=Y12
XQ(1,I)=C(I)/S(I)-C(I+1)/S(I+1)
XQ(2,I)=T(1,I)*C(I)/S(I)-T(1,I+1)*C(I+1)/S(I+1)+DLOG(S(I+1))
*-DLOG(S(I))
XQ(3,I)=Y13
XQ(4,I)=Y14
XQ(5,I)=Y15
XQ(6,I)=Y16
XQ(7,I)=Y17
XP(1,I)=C(I)/(2.DO*(S(I)**2))-C(I+1)/(2.DO*(S(I+1)**2))
*+XK(1,I)/2.DO
XP(2,I)=1.DO/(2.DO*S(I))-1.DO/(2.DO*S(I+1))-C(I+1)*T(1,I+1)/(2.DO
*(S(I+1)**2))+C(I)*T(1,I)/(2.DO*(S(I)**2))+XK(2,I)/2.DO
DO 32 L=2,6
XP(L+1,I)=(L*T(L-1,I)*S(I)+T(L,I)*C(I))/(2.DO*(S(I)**2))
*-(L*T(L-1,I+1)*S(I+1)+T(L,I+1)*C(I+1))/(2.DO*(S(I+1)**2))
*+L*(L-1)*XK(L-1,I)/2.DO+XK(L+1,I)/2.DO
32 CONTINUE
XQ(1,I)=1.DO/S(I)-1.DO/S(I+1)
DO 33 L=1,6
33 XQ(L+1,I)=T(L,I)/S(I)-T(L,I+1)/S(I+1)+L*XK(L,I)
DO 5 L=1,7
5 XL(L,I)=XK(L,I)-XI(L,I)
DO 34 L=1,7
XR(L,I)=XQ(L,I)-XN(L,I)
34 XS(L,I)=XP(L,I)-XK(L,I)

```

CAS PARTICULIER DE LA CALOTTE SUPERIEURE

```

24 IF(I-1)7,8,7
8 P(3,1,I)=T(3,I+1)
P(4,1,I)=-2.DO*T(2,I+1)
P(5,1,I)=T(1,I+1)
P(1,3,I)=3.DO*T(1,I+1)
P(1,4,I)=-T(2,I+1)
P(2,3,I)=-2.DO
P(2,4,I)=T(1,I+1)
DO 9 L=6,8

```

```

9 P(L,2,I)=P(L-3,1,I)
DO 10 L=4,5
DO 10 J=5,6
P(L,J,I)=P(L-3,J-2,I)
10 P(L+3,J+2,I)=P(L-3,J-2,I)
DO 11 L=1,8
DO 11 J=1,8
11 P(L,J,I)=P(L,J,I)/T(3,I+1)
DM(1,1,I)=XI(5,I)+EPS(I)*(4.DO*XI(3,I)+XK(5,I)*M2)
DM(2,1,I)=XI(6,I)+EPS(I)*(6.DO*XI(4,I)+XK(6,I)*M2)
DM(2,2,I)=XI(7,I)+EPS(I)*(9.DO*XI(5,I)+XK(7,I)*M2)
DM(1,2,I)=DM(2,1,I)
DM(3,3,I)=XI(3,I)
DM(3,4,I)=XI(4,I)
DM(3,5,I)=XI(5,I)
DM(4,3,I)=XI(4,I)
DM(4,4,I)=XI(5,I)
DM(4,5,I)=XI(6,I)
DM(5,3,I)=XI(5,I)
DM(5,4,I)=XI(6,I)
DM(5,5,I)=XI(7,I)
DO 13 L=6,8
DO 13 J=6,8
13 DM(L,J,I)=DM(L-3,J-3,I)
DK(1,1,I)=2.DO*Z1*XI(5,I)+EPS(I)*(4.DO*XI(1,I)+8.DO*XNU*XJ(2,I)
**+4.DO*XL(3,I)+4.DO*M2*(2.DO-3.DO*XNU)*XK(3,I)+M4*XP(5,I)
**+4.DO*M2*Z6*XQ(4,I)+2.DO*M2*Z4*XS(5,I))
DK(2,1,I)=2.DO*Z1*XI(6,I)+EPS(I)*(12.DO*XI(2,I)+18.DO*XNU*XJ(3,I)
**+6.DO*XL(4,I)+4.DO*M2*(3.DO-5.DO*XNU)*XK(4,I)+M4*XP(6,I)
**+5.DO*M2*Z6*XQ(5,I)+2.DO*M2*Z4*XS(6,I))
DK(2,2,I)=2.DO*Z1*XI(7,I)+EPS(I)*(36.DO*XI(3,I)+36.DO*XNU*XJ(4,I)
**+9.DO*XL(5,I)+6.DO*M2*(3.DO-5.DO*XNU)*XK(5,I)+M4*XP(7,I)
**+6.DO*M2*Z6*XQ(6,I)+2.DO*M2*Z4*XS(7,I))
DK(3,1,I)=Z1*(XI(3,I)+XJ(4,I))+EPS(I)*(-2.DO*XI(1,I)-4.DO*XNU
**XJ(2,I)-2.DO*XL(3,I)+M2*(3.DO*XNU-2.DO)*XK(3,I)+M2*Z5*XQ(4,I))
DK(3,2,I)=Z1*(XI(4,I)+XJ(5,I))+EPS(I)*(-6.DO*XI(2,I)-9.DO*XNU
**XJ(3,I)-3.DO*XL(4,I)+M2*(4.DO*XNU-3.DO)*XK(4,I)+M2*Z5*XQ(5,I))
DK(3,3,I)=XI(1,I)+2.DO*XNU*XJ(2,I)+XL(3,I)+M2*Z2*XK(3,I)

```

```

DK(4,1,I)=Z1*(2.DO*XI(4,I)+XJ(5,I))+EPS(I)*(-4.DO*XI(2,I)-6.DO*
*XNU*XJ(3,I)-2.DO*XL(4,I)+M2*(4.DO*XNU-2.DO)*XK(4,I)+M2*Z5*XQ(5,I))
DK(4,2,I)=Z1*(2.DO*XI(5,I)+XJ(6,I))+EPS(I)*(-12.DO*XI(3,I)-12.DO*
*XNU*XJ(4,I)-3.DO*XL(5,I)+M2*(5.DO*XNU-3.DO)*XK(5,I)+M2*Z5*XQ(6,I))
DK(4,3,I)=2.DO*XI(2,I)+3.DO*XNU*XJ(3,I)+XL(4,I)+M2*Z2*XK(4,I)
DK(4,4,I)=4.DO*XI(3,I)+4.DO*XNU*XJ(4,I)+XL(5,I)+M2*Z2*XK(5,I)
DK(5,1,I)=Z1*(3.DO*XI(5,I)+XJ(6,I))+EPS(I)*(-6.DO*XI(3,I)-8.DO*
*XNU*XJ(4,I)-2.DO*XL(5,I)+M2*(5.DO*XNU-2.DO)*XK(5,I)+M2*Z5*XQ(6,I))
DK(5,2,I)=Z1*(3.DO*XI(6,I)+XJ(7,I))+EPS(I)*(-18.DO*XI(4,I)-15.DO*
*XNU*XJ(5,I)-3.DO*XL(6,I)+M2*(6.DO*XNU-3.DO)*XK(6,I)+M2*Z5*XQ(7,I))
DK(5,3,I)=3.DO*XI(3,I)+4.DO*XNU*XJ(4,I)+XL(5,I)+M2*Z2*XK(5,I)
DK(5,4,I)=6.DO*XI(4,I)+5.DO*XNU*XJ(5,I)+XL(6,I)+M2*Z2*XK(6,I)
DK(5,5,I)=9.DO*XI(5,I)+6.DO*XNU*XJ(6,I)+XL(7,I)+M2*Z2*XK(7,I)
DK(6,1,I)=M*Z1*XN(4,I)+EPS(I)*(2.DO*M*(1.DO-2.DO*XNU)*XN(2,I)
*-M*(5.DO-3.DO*XNU)*XM(3,I)+M3*XQ(4,I)+M*Z4*XR(4,I))
DK(6,2,I)=M*Z1*XN(5,I)+EPS(I)*(3.DO*M*(1.DO-3.DO*XNU)*XN(3,I)
*-M*(7.DO-4.DO*XNU)*XM(4,I)+M3*XQ(5,I)+M*Z4*XR(5,I))
DK(6,3,I)=M*((3.DO*XNU-1.DO)*XN(2,I)/2.DO+Z3*XM(3,I))
DK(6,4,I)=M*((5.DO*XNU-1.DO)*XN(3,I)/2.DO+Z3*XM(4,I))
DK(6,5,I)=M*((7.DO*XNU-1.DO)*XN(4,I)/2.DO+Z3*XM(5,I))
DK(6,6,I)=Z2*(XI(1,I)+XL(3,I)-2.DO*XJ(2,I))+M2*XK(3,I)
DK(7,1,I)=M*Z1*XN(5,I)+EPS(I)*(2.DO*M*(2.DO-3.DO*XNU)*XN(3,I)
*-M*(6.DO-4.DO*XNU)*XM(4,I)+M3*XQ(5,I)+M*Z4*XR(5,I))
DK(7,2,I)=M*Z1*XN(6,I)+EPS(I)*(3.DO*M*(2.DO-4.DO*XNU)*XN(4,I)
*-M*(8.DO-5.DO*XNU)*XM(5,I)+M3*XQ(6,I)+M*Z4*XR(6,I))
DK(7,3,I)=M*((2.DO*XNU-1.DO)*XN(3,I)+Z3*XM(4,I))
DK(7,4,I)=M*((3.DO*XNU-1.DO)*XN(4,I)+Z3*XM(5,I))
DK(7,5,I)=M*((4.DO*XNU-1.DO)*XN(5,I)+Z3*XM(6,I))
DK(7,6,I)=Z2*(2.DO*XI(2,I)-3.DO*XJ(3,I)+XL(4,I))+M2*XK(4,I)
DK(7,7,I)=Z2*(4.DO*XI(3,I)-4.DO*XJ(4,I)+XL(5,I))+M2*XK(5,I)
DK(8,1,I)=M*Z1*XN(6,I)+EPS(I)*(2.DO*M*(3.DO-4.DO*XNU)*XN(4,I)
*-M*(7.DO-5.DO*XNU)*XM(5,I)+M3*XQ(6,I)+M*Z4*XR(6,I))
DK(8,2,I)=M*Z1*XN(7,I)+EPS(I)*(3.DO*M*(3.DO-5.DO*XNU)*XN(5,I)
*-M*(9.DO-6.DO*XNU)*XM(6,I)+M3*XQ(7,I)+M*Z4*XR(7,I))
DK(8,3,I)=M*((5.DO*XNU-3.DO)*XN(4,I)/2.DO+Z3*XM(5,I))
DK(8,4,I)=M*((7.DO*XNU-3.DO)*XN(5,I)/2.DO+Z3*XM(6,I))
DK(8,5,I)=M*((9.DO*XNU-3.DO)*XN(6,I)/2.DO+Z3*XM(7,I))
DK(8,6,I)=Z2*(3.DO*XI(3,I)-4.DO*XJ(4,I)+XL(5,I))+M2*XK(5,I)

```

```

DK(8,7,I)=Z2*(6.DC*X I(4,I)-6.DO*XJ(5,I)+XL(6,I))+M2*XK(6,I)
DK(8,8,I)=Z2*(9.DC*X I(5,I)-5.DC*XJ(6,I)+XL(7,I))+M2*XK(7,I)
DO 15 L=1,8
DO 15 J=1,L
15 DK(J,L,I)=DK(L,J,I)
DO 41 L=3,8
DO 41 J=3,8
41 DK(L,J,I)=DK(L,J,I)*(1.DO+EPS(I))
GC TO 200

```

CAS GENERAL

```

7 P(1,1,I)=T(4,I+1)-4.DO*T(1,I)*T(3,I+1)+3.DC*T(2,I)*T(2,I+1)
P(2,1,I)=6.DO*T(1,I)*T(1,I+1)-T(1,I+1)-T(1,I)
P(3,1,I)=3.DC*(T(2,I)-T(2,I+1))
P(4,1,I)=2.DC*(T(1,I+1)-T(1,I))
P(1,2,I)=-T(1,I)*T(2,I+1)*((T(1,I+1)-T(1,I))**2)
P(2,2,I)=T(4,I+1)-3.DC*T(2,I)*T(2,I+1)+2.DC*T(1,I+1)*T(3,I)
P(3,2,I)=-2.DC*T(3,I+1)-T(3,I)+3.DC*T(1,I)*T(2,I+1)
P(4,2,I)=(T(1,I+1)-T(1,I))**2
DO 16 L=5,8
DO 16 J=3,4
P(L,J,I)=P(L-4,J-2,I)
16 P(L+4,J+2,I)=P(L-4,J-2,I)
P(1,7,I)=T(4,I)-4.DO*T(1,I+1)*T(3,I)+3.DC*T(2,I)*T(2,I+1)
P(2,7,I)=-P(2,1,I)
P(3,7,I)=-P(3,1,I)
P(4,7,I)=-P(4,1,I)
P(1,8,I)=-T(1,I+1)*T(2,I)*((T(1,I+1)-T(1,I))**2)
P(2,8,I)=T(4,I)-3.DC*T(2,I)*T(2,I+1)+2.DC*T(1,I)*T(3,I+1)
P(3,8,I)=-2.DC*T(3,I)-T(3,I+1)+3.DC*T(1,I+1)*T(2,I)
P(4,8,I)=P(4,2,I)
CC 25 L=5,8
DO 25 J=9,10
P(L,J,I)=P(L-4,J-2,I)
25 P(L+4,J+2,I)=P(L-4,J-2,I)
DO 17 L=1,12
DO 17 J=1,12

```

```

17 P(L,J,I)=P(L,J,I)/((T(1,I+1)-T(1,I))**4)
DM(1,1,I)=XI(1,I)+EPS(I)*XK(1,I)*M2
DM(1,2,I)=XI(2,I)+EPS(I)*XK(2,I)*M2
DM(1,3,I)=XI(3,I)+EPS(I)*XK(3,I)*M2
DM(1,4,I)=XI(4,I)+EPS(I)*XK(4,I)*M2
DM(2,2,I)=XI(3,I)+EPS(I)*(XI(1,I)+XK(3,I)*M2)
DM(2,3,I)=XI(4,I)+EPS(I)*(2.DO*X I(2,I)+XK(4,I)*M2)
DM(2,4,I)=XI(5,I)+EPS(I)*(3.DO*X I(3,I)+XK(5,I)*M2)
DM(3,3,I)=XI(5,I)+EPS(I)*(4.DO*X I(3,I)+XK(5,I)*M2)
DM(3,4,I)=XI(6,I)+EPS(I)*(6.DO*X I(4,I)+XK(6,I)*M2)
DM(4,4,I)=XI(7,I)+EPS(I)*(9.DO*X I(5,I)+XK(7,I)*M2)
DM(5,5,I)=XI(1,I)
DM(5,6,I)=XI(2,I)
DM(5,7,I)=XI(3,I)
DM(5,8,I)=XI(4,I)
DM(6,6,I)=XI(3,I)
DM(6,7,I)=XI(4,I)
DM(6,8,I)=XI(5,I)
DM(7,7,I)=XI(5,I)
DM(7,8,I)=XI(6,I)
DM(8,8,I)=XI(7,I)
DO 26 L=1,8
DO 26 J=1,L
26 DM(L,J,I)=DM(J,L,I)
CC 18 L=9,12
CC 18 J=9,12
18 DM(L,J,I)=DM(L-4,J-4,I)
DK(1,1,I)=2.DC*Z1*X I(1,I)+EPS(I)*(M4*XP(1,I)+2.DO*M2*Z4*XS(1,I))
DK(2,1,I)=2.DC*Z1*X I(2,I)+EPS(I)*(M4*XP(2,I)+2.DO*M2*Z4*XS(2,I)+M2*Z6*XQ(1,I))
DK(2,2,I)=2.DC*Z1*X I(3,I)+EPS(I)*(XL(1,I)+2.DO*M2*Z4*XK(1,I)+M4*XP(3,I)+2.DO*M2*Z6*XQ(2,I)+2.DO*M2*Z4*XS(3,I))
DK(3,1,I)=2.DC*Z1*X I(3,I)+EPS(I)*(-2.DC*M2*XNU*XK(1,I)+M4*XP(3,I)+2.DO*M2*Z6*XQ(2,I)+2.DO*M2*Z4*XS(3,I))
DK(3,2,I)=2.DC*Z1*X I(4,I)+EPS(I)*(2.DO*XNU*XJ(1,I)+2.DO*XL(2,I)+2.DO*M2*(2.DC-3.DO*XNU)*XK(2,I)+M4*XP(4,I)+3.DO*M2*Z6*XQ(3,I)+2.DC*M2*Z4*XS(4,I))
DK(3,3,I)=2.DC*Z1*X I(5,I)+EPS(I)*(4.DO*X I(1,I)+8.DO*XNU*XJ(2,I)

```

```

**+4.D0*XL(3,1)+4.D0*M2*(2.D0-3.D0)*XNU)*XK(3,1)+M4*XP(5,1)
**+4.D0*M2*Z6*XQ(4,1)+2.D0*M2*Z4*XS(5,1)
DK(4,1,1)=2.D0*Z1*X1(4,1)+EPS(1)*(-6.D0*M2*XNU*XK(2,1)+M4*XP(4,1)
**+3.D0*M2*Z6*XQ(3,1)+2.D0*M2*Z4*XS(4,1)
DK(4,2,1)=2.D0*Z1*X1(5,1)+EPS(1)*(6.D0*XNU*XJ(2,1)+3.D0*XL(3,1)
**+6.D0*M2*(1.D0-2.D0)*XNU)*XK(3,1)+M4*XP(5,1)+4.D0*M2*Z6*XQ(4,1)
**+2.D0*M2*Z4*XS(5,1)
DK(4,3,1)=2.D0*Z1*X1(6,1)+EPS(1)*(12.D0*X1(2,1)+18.D0*XNU*XJ(3,1)
**+6.D0*XL(4,1)+4.D0*M2*(3.D0-5.D0)*XNU)*XK(4,1)+M4*XP(6,1)
**+5.D0*M2*Z6*XQ(5,1)+2.D0*M2*Z4*XS(6,1)
DK(4,4,1)=2.D0*Z1*X1(7,1)+EPS(1)*(36.D0*X1(3,1)+36.D0*XNU*XJ(4,1)
**+9.D0*XL(5,1)+6.D0*M2*(3.D0-5.D0)*XNU)*XK(5,1)+M4*XP(7,1)
**+6.D0*M2*Z6*XQ(6,1)+2.D0*M2*Z4*XS(7,1)
DK(5,1,1)=Z1*XJ(1,1)+EPS(1)*M2*Z5*XQ(1,1)
DK(5,2,1)=Z1*XJ(2,1)+EPS(1)*(-X1(1,1)-M2*Z4*XK(1,1)+M2*Z5*XQ(2,1))
DK(5,3,1)=Z1*XJ(3,1)+EPS(1)*(-2.D0*XNU*XJ(1,1)-2.D0*XL(2,1)
*-2.D0*M2*Z4*XK(2,1)+M2*Z5*XQ(3,1))
DK(5,4,1)=Z1*XJ(4,1)+EPS(1)*(-6.D0*XNU*XJ(2,1)-3.D0*XL(3,1)
*-3.D0*M2*Z4*XK(3,1)+M2*Z5*XQ(4,1))
DK(5,5,1)=X1(1,1)+M2*Z2*XK(1,1)
DK(6,1,1)=Z1*(X1(1,1)+XJ(2,1))+EPS(1)*(M2*XNU*XK(1,1)+M2*Z5
**XQ(2,1))
DK(6,2,1)=Z1*(X1(2,1)+XJ(3,1))+EPS(1)*(-XNU*XJ(1,1)-X1(2,1)
**+M2*(2.D0*XNU-1.D0)*XK(2,1)+M2*Z5*XQ(3,1))
DK(6,3,1)=Z1*(X1(3,1)+XJ(4,1))+EPS(1)*(-2.D0*X1(1,1)-4.D0*XNU
**XJ(2,1)-2.D0*XL(3,1)+M2*(3.D0*XNU-2.D0)*XK(3,1)+M2*Z5*XQ(4,1))
DK(6,4,1)=Z1*(X1(4,1)+XJ(5,1))+EPS(1)*(-6.D0*X1(2,1)-9.D0*XNU
**XJ(3,1)-3.D0*XL(4,1)+M2*(4.D0*XNU-3.D0)*XK(4,1)+M2*Z5*XQ(5,1))
DK(6,5,1)=XNU*XJ(1,1)+XL(2,1)+M2*Z2*XK(2,1)
DK(6,6,1)=X1(1,1)+2.D0*XNU*XJ(2,1)+XL(3,1)+M2*Z2*XK(3,1)
DK(7,1,1)=Z1*(2.D0*X1(2,1)+XJ(3,1))+EPS(1)*(2.D0*M2*XNU*XK(2,1)
**+M2*Z5*XQ(3,1))
DK(7,2,1)=Z1*(2.D0*X1(3,1)+XJ(4,1))+EPS(1)*(-2.D0*XNU*XJ(2,1)
*-X1(3,1)+M2*(3.D0*XNU-1.D0)*XK(3,1)+M2*Z5*XQ(4,1))
DK(7,3,1)=Z1*(2.D0*X1(4,1)+XJ(5,1))+EPS(1)*(-4.D0*X1(2,1)-6.D0*
*XNU*XJ(3,1)-2.D0*XL(4,1)+M2*(4.D0*XNU-2.D0)*XK(4,1)+M2*Z5*XQ(5,1))
DK(7,4,1)=Z1*(2.D0*X1(5,1)+XJ(6,1))+EPS(1)*(-12.D0*X1(3,1)-12.D0*
*XNU*XJ(4,1)-3.D0*XL(5,1)+M2*(5.D0*XNU-3.D0)*XK(5,1)+M2*Z5*XQ(6,1))

```

```

DK(7,5,1)=2.D0*XNU*XJ(2,1)+XL(3,1)+M2*Z2*XK(3,1)
DK(7,6,1)=2.D0*X1(2,1)+3.D0*XNU*XJ(3,1)+XL(4,1)+M2*Z2*XK(4,1)
DK(7,7,1)=4.D0*X1(3,1)+4.D0*XNU*XJ(4,1)+XL(5,1)+M2*Z2*XK(5,1)
DK(8,1,1)=Z1*(3.D0*X1(3,1)+XJ(4,1))+EPS(1)*(3.D0*M2*XNU*XK(3,1)
**+M2*Z5*XQ(4,1))
DK(8,2,1)=Z1*(3.D0*X1(4,1)+XJ(5,1))+EPS(1)*(-3.D0*XNU*XJ(3,1)
*-X1(4,1)+M2*(4.D0*XNU-1.D0)*XK(4,1)+M2*Z5*XQ(5,1))
DK(8,3,1)=Z1*(3.D0*X1(5,1)+XJ(6,1))+EPS(1)*(-6.D0*X1(3,1)-8.D0*
*XNU*XJ(4,1)-2.D0*XL(5,1)+M2*(5.D0*XNU-2.D0)*XK(5,1)+M2*Z5*XQ(6,1))
DK(8,4,1)=Z1*(3.D0*X1(6,1)+XJ(7,1))+EPS(1)*(-18.D0*X1(4,1)-15.D0*
*XNU*XJ(5,1)-3.D0*XL(6,1)+M2*(6.D0*XNU-3.D0)*XK(6,1)+M2*Z5*XQ(7,1))
DK(8,5,1)=3.D0*XNU*XJ(3,1)+XL(4,1)+M2*Z2*XK(4,1)
DK(8,6,1)=3.D0*X1(3,1)+4.D0*XNU*XJ(4,1)+XL(5,1)+M2*Z2*XK(5,1)
DK(8,7,1)=6.D0*X1(4,1)+5.D0*XNU*XJ(5,1)+XL(6,1)+M2*Z2*XK(6,1)
DK(8,8,1)=9.D0*X1(5,1)+6.D0*XNU*XJ(6,1)+XL(7,1)+M2*Z2*XK(7,1)
DK(9,1,1)=M*Z1*XN(1,1)+EPS(1)*(M3*XG(1,1)+M*Z4*XR(1,1))
DK(9,2,1)=M*Z1*XN(2,1)+EPS(1)*(M3*XG(2,1)+M*Z4*XR(2,1)-M*Z5*
**XM(1,1))
DK(9,3,1)=M*Z1*XN(3,1)+EPS(1)*(-2.D0*M*XNU*XN(1,1)-2.D0*M*(2.D0-
*XNU)*XM(2,1)+M3*XU(3,1)+M*Z4*XR(3,1))
DK(9,4,1)=M*Z1*XN(4,1)+EPS(1)*(-6.D0*M*XNU*XN(2,1)-3.D0*M*(2.D0-
*XNU)*XM(3,1)+M3*XU(4,1)+M*Z4*XR(4,1))
DK(9,5,1)=M*Z3*XM(1,1)
DK(9,6,1)=M*(XNU*XN(1,1)+Z3*XM(2,1))
DK(9,7,1)=M*(2.D0*XNU*XN(2,1)+Z3*XM(3,1))
DK(9,8,1)=M*(3.D0*XNU*XN(3,1)+Z3*XM(4,1))
DK(9,9,1)=Z2*XL(1,1)+M2*XK(1,1)
DK(10,1,1)=M*Z1*XN(2,1)+EPS(1)*(-1.D0*M*Z4*XM(1,1)+M3*XU(2,1)
**+M*Z4*XR(2,1))
DK(10,2,1)=M*Z1*XN(3,1)+EPS(1)*(1.D0*M*Z4*XN(1,1)
*-M*(3.D0-2.D0*XNU)*XM(2,1)+M3*XU(3,1)+M*Z4*XR(3,1))
DK(10,3,1)=M*Z1*XN(4,1)+EPS(1)*(2.D0*M*(1.D0-2.D0*XNU)*XN(2,1)
*-M*(5.D0-3.D0*XNU)*XM(3,1)+M3*XU(4,1)+M*Z4*XR(4,1))
DK(10,4,1)=M*Z1*XN(5,1)+EPS(1)*(3.D0*M*(1.D0-3.D0*XNU)*XN(3,1)
*-M*(7.D0-4.D0*XNU)*XM(4,1)+M3*XU(5,1)+M*Z4*XR(5,1))
DK(10,5,1)=M*((1.D0*XNU-1.D0)*XN(1,1)/2.D0+Z3*XM(2,1))
DK(10,6,1)=M*((3.D0*XNU-1.D0)*XN(2,1)/2.D0+Z3*XM(3,1))
DK(10,7,1)=M*((5.D0*XNU-1.D0)*XN(3,1)/2.D0+Z3*XM(4,1))

```

IV 36CN-FL-479 3-3

SPHER

DATE 18/05/76

TIME

18.57.27

```

DK(10,8,I)=M*((1.00*XNU-1.00)*XN(4,I)/2.00+Z3*XN(5,I))
DK(10,9,I)=Z2*(XL(2,I)-XJ(1,I))+M2*XK(2,I)
DK(10,10,I)=Z2*(XI(1,I)+XL(3,I)-2.00*XJ(2,I))+M2*XK(3,I)
DK(11,1,I)=M*Z1*XN(3,I)+EPS(I)*(-2.00*M*Z4*XN(2,I)+M3*XU(3,I)
+M*Z4*XR(3,I))
DK(11,2,I)=M*Z1*XN(4,I)+EPS(I)*(2.00*M*Z4*XN(2,I)
*-M*(4.00-3.00*XNU)*XM(3,I)+M3*XU(4,I)+M*Z4*XR(4,I))
DK(11,3,I)=M*Z1*XN(5,I)+EPS(I)*(2.00*M*(2.00-3.00*XNU)*XN(3,I)
*-M*(6.00-4.00*XNU)*XM(4,I)+M3*XU(5,I)+M*Z4*XR(5,I))
DK(11,4,I)=M*Z1*XN(6,I)+EPS(I)*(3.00*M*(2.00-4.00*XNU)*XN(4,I)
*-M*(8.00-5.00*XNU)*XM(5,I)+M3*XU(6,I)+M*Z4*XR(6,I))
DK(11,5,I)=M*((1.00*XNU-1.00)*XN(2,I)+Z3*XN(3,I))
DK(11,6,I)=M*((2.00*XNU-1.00)*XN(3,I)+Z3*XN(4,I))
DK(11,7,I)=M*((3.00*XNU-1.00)*XN(4,I)+Z3*XN(5,I))
DK(11,8,I)=M*((4.00*XNU-1.00)*XN(5,I)+Z3*XN(6,I))
DK(11,9,I)=Z2*(XL(3,I)-2.00*XJ(2,I))+M2*XK(3,I)
DK(11,10,I)=Z2*(2.00*XJ(3,I)+XL(4,I))+M2*XK(4,I)
DK(11,11,I)=Z2*(3.00*XJ(4,I)+XL(5,I))+M2*XK(5,I)
DK(12,1,I)=M*Z1*XN(4,I)+EPS(I)*(-3.00*M*Z4*XN(3,I)+M3*XU(4,I)
+M*Z4*XR(4,I))
DK(12,2,I)=M*Z1*XN(5,I)+EPS(I)*(3.00*M*Z4*XN(3,I)
*-M*(5.00-4.00*XNU)*XM(4,I)+M3*XU(5,I)+M*Z4*XR(5,I))
DK(12,3,I)=M*Z1*XN(6,I)+EPS(I)*(2.00*M*(3.00-4.00*XNU)*XN(4,I)
*-M*(7.00-5.00*XNU)*XM(5,I)+M3*XU(6,I)+M*Z4*XR(6,I))
DK(12,4,I)=M*Z1*XN(7,I)+EPS(I)*(3.00*M*(3.00-5.00*XNU)*XN(5,I)
*-M*(9.00-6.00*XNU)*XM(6,I)+M3*XU(7,I)+M*Z4*XR(7,I))
DK(12,5,I)=M*((3.00*XNU-3.00)*XN(3,I)/2.00+Z3*XN(4,I))
DK(12,6,I)=M*((5.00*XNU-3.00)*XN(4,I)/2.00+Z3*XN(5,I))
DK(12,7,I)=M*((7.00*XNU-3.00)*XN(5,I)/2.00+Z3*XN(6,I))
DK(12,8,I)=M*((9.00*XNU-3.00)*XN(6,I)/2.00+Z3*XN(7,I))
DK(12,9,I)=Z2*(XL(4,I)-3.00*XJ(3,I))+M2*XK(4,I)
DK(12,10,I)=Z2*(3.00*XJ(4,I)+XL(5,I))+M2*XK(5,I)
DK(12,11,I)=Z2*(5.00*XJ(5,I)+XL(6,I))+M2*XK(6,I)
DK(12,12,I)=Z2*(7.00*XJ(6,I)+XL(7,I))+M2*XK(7,I)
DO 20 L=1,12
DO 20 J=1,L
20 DK(J,L,I)=DK(L,J,I)
DO 27 L=5,12

```

IV 36CN-FG-479 3-8

SPHER

DATE 18/05/76

TIME

18.57.27

```

DO 27 J=5,12
27 DK(L,J,I)=DK(L,J,I)*(1.00+EPS(I))
C
C
C      CALCUL DE T1 TRANSPOSEE DE T
200 DO 30 L=1,12
DO 30 J=1,L
30 P1(J,L,I)=P(L,J,I)
C
C
C      CALCUL DE MT ET DE KT
DO 40 L=1,12
DO 40 J=1,L
DO 40 K=1,L
DM1(L,J,I)=DM1(L,J,I)+DM(L,K,I)*P(K,J,I)
DK1(L,J,I)=DK1(L,J,I)+DK(L,K,I)*P(K,J,I)
40 CONTINUE
C
C
C      CALCUL DE TIMT ET TIKT
DO 50 L=1,12
DO 50 J=1,L
DO 50 K=1,L
AM(L,J,I)=AM(L,J,I)+P1(L,K,I)*DM1(K,J,I)
AK(L,J,I)=AK(L,J,I)+P1(L,K,I)*DK1(K,J,I)
50 CONTINUE
1 CONTINUE
RETURN
END

```

B I B L I O G R A P H I E

- | 1 | H. LAMB Proc. London Math. Soc. 13 (1882)
- | 2 | H. LAMB Proc. London Math. Soc. 14 (1883)
- | 3 | J. MANDEL Cours de Mécanique des milieux continus
 Gauthier-Villars - Paris - (1962)
- | 4 | P. GERMAIN Cours de Mécanique des milieux continus
 Masson et Cie - Paris - (1973)
- | 5 | M. SOARE Application des équations aux différences
 finies au calcul des coques.
 Editions Eyrolles - Paris - (1962)
- | 6 | W. FLÜGGE Statique et dynamique des coques
 Editions Eyrolles - Paris - (1960)
- | 7 | W. E. BAKER Axisymmetric modes of vibration of thin
 spherical shells
 J. Acoust. Soc. Am. 33,12 p. 1749.1758 (1961)
- | 8 | A.E.H. LOVE A treatise on the mathematical theory of elas-
 ticity
 Dover Publications - New York (1944)
- | 9 | J. COURBON Vibrations radiales d'une enveloppe sphérique
 Annales P α C n° 11 (1971)
- |10 | P.M. NAGHDI On vibrations of elastic spherical shells
 J. Applied Mechanics - 29, 65.72 (1962)
 A. KALNINS
- |11 | A.H. SHAH Three dimensional and shell theory analysis
 of elastic waves in a hollow sphere
 J. Applied Mechanics 36, 431.444 (1969)
 C.V. RAMKRISHNAN
 S.K. DATTA

- | 12| J.P. CAMBOU Contribution à l'étude des vibrations des
réservoirs sphériques
Thèse de Docteur-Ingénieur - Nantes (1974)

- | 13| W.E. BAKER Elastic response of thin spherical shells to
W.C.L. HU axisymmetric blast loading
T.R. JACKSON J. Applied Mechanics 33, 800.806 (1966)

- | 14| M. MORSE Methods of theoretical physics
H. FESHBACH Mac Graw Hill Book Company (1953)

- | 15| E.W. ROSS Membrane natural frequencies for spherical
caps
J. Applied Mechanics 32, 432.434 (1965)

- | 16| T. VOGEL Les fonctions orthogonales dans les problèmes
aux limites dans la physique mathématique
Editions du C.N.R.S. (1953)

- | 17| L. ROBIN Fonctions sphériques de Legendre et fonctions
sphéroïdales
Gauthier Villars - Paris - (1958)

- | 18| A. KALNINS Axisymmetric vibrations of shallow elastic
P.M. NAGHDI spherical shells
J. Acoust. Soc. Am 33, 3, 342.347 (1960)

- | 19| A. KALNINS Effect of bending on vibrations of spherical
shells
J. Acoust. Soc. Am 36, 1, 74.81 (1964)

- | 20| O.C. ZIENKIEWICZ The finite element method in engineering
science
Mac Graw Hill- London (1971)

- | 21| P.E. GRAFTON Analysis of axisymmetrical shells by the
D.R. STROME direct stiffness method
A.I.A.A. Journal - 1, 2342.2347 (1963)

